

Devoir surveillé

Exercice 1

Commun Ã tous les candidats

Pour chacune des huit affirmations (entre guillemets) ci -dessous, préciser si elle est vraie ou fausse.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la mention « vrai » ou « faux ».

Une réponse correcte rapporte 0, 5 point, une réponse incorrecte enlève 0, 25 point, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de points.

Un éventuel total négatif sera ramené à zéro.

- « Si a est un nombre réel quelconque et f une fonction définie et strictement décroissante sur $]a ; +\infty[$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ».
- Soient f et g deux fonctions définies sur $[0 ; +\infty[$, g ne s'annulant pas :
« Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -1$ ».
- « Si f est une fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ telle que $0 \leq f(x) \leq \sqrt{x}$ sur $[0 ; +\infty[$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ ».
- On considère un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
« Si f est une fonction définie sur \mathbb{R}^* alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ».
- « La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x^2 + 3x + 1)e^x$ est une solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $y' - y = (2x + 3)e^x$ ».
- Soient A, B, C trois points du plan. On appelle I le barycentre des points A et B affectés respectivement des coefficients 3 et -2 .
« Si G est le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 3, -2 et 1 alors G est le milieu du segment $[CI]$ ».
- Soient A, B, C trois points du plan et G le barycentre de A, B et C affectés respectivement des coefficients 3, -2 et 1.
« L'ensemble des points M du plan tels que $\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 1$ est le cercle de centre G et de rayon 1 ».
- Soient A et B deux points distincts du plan. On désigne par M un point quelconque du plan.
« Le produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ est nul si et seulement si $M = A$ ou $M = B$ ».

Exercice 2

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spÃ©cialitÃ©

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Unité graphique : 0,5 cm.

On note j le nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 8, b = 6j$ et $c = 8j^2$.

Soit A' l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Soit B' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Soit C' l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

- Placer les points A, B, C, A', B' et C' dans le repère donné.
- On appelle a', b' et c' les affixes respectives des points A', B' et C' .
 - Calculer a' . On vérifiera que a' est un nombre réel.
 - Montrer que $b' = 16e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
En déduire que O est un point de la droite (BB') .
 - On admet que $c' = 7 + 7i\sqrt{3}$.
Montrer que les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes en O .
- On se propose désormais de montrer que la distance $MA + MB + MC$ est minimale lorsque $M = O$.
 - Calculer la distance $OA + OB + OC$.
 - Montrer que $j^3 = 1$ et que $1 + j + j^2 = 0$.
 - On considère un point M quelconque d'affixe z du plan complexe.
On rappelle que $a = 8, b = 6j$ et $c = 8j^2$.
Déduire des questions précédentes les égalités suivantes :
$$|(a - z) + (b - z)j^2 + (c - z)j| = |a + bj^2 + cj| = 22.$$
 - On admet que, quels que soient les nombres complexes z, z' et z'' :
$$|z + z' + z''| \leq |z| + |z'| + |z''|.$$

Montrer que $MA + MB + MC$ est minimale lorsque $M = O$.

Exercice 3

Tableau d'informations n°1.

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$	
Signe de $u(x)$	+	0	−	−	0	+
Signe de $u'(x)$	−	−	0	+	+	+

Le tableau d'informations n°1 ci-dessus fournit des informations sur une fonction u définie et dérivable sur \mathbb{R} .

1. Établir un tableau des variations de la fonction u .
On considère maintenant les fonctions f et g définies par $f(x) = \ln[u(x)]$ et $g(x) = e^{u(x)}$ où u désigne la fonction de la question précédente.
2. (a) Une des deux affirmations suivantes est fausse, laquelle ? Justifier en précisant le bon ensemble de définition :
Affirmation 1 : « La fonction f est définie sur \mathbb{R} » ;
Affirmation 2 : « La fonction g est définie sur \mathbb{R} ».
(b) Donner les variations des fonctions f et g . Énoncer le(s) théorème(s) utilisé(s).
(c) Déterminer, en justifiant avec soin, $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x)$
(d) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $g(x) = 1$.
3. Voici d'autres informations relatives à la fonction u et à sa dérivée u' .

Tableau d'informations n°2.

x	-2	0	$\frac{1}{2}$	2	3
$u(x)$	4	-2	$-\frac{9}{4}$	0	4
$u'(x)$	-5	1	0	3	5

Terminer chacune des deux phrases **a.** et **b.** par la réponse qui vous semble exacte, parmi celles proposées dans les cadres ci-dessous, en justifiant votre choix.

- (a) La tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 2 est parallèle :

• à l'axe des abscisses	• à la droite d'équation $y = x$	• à la droite d'équation $y = 3x$
-------------------------	----------------------------------	-----------------------------------

- (b) Le nombre $f'(-2)$:

• n'existe pas	• vaut -20	• vaut $-\frac{4}{5}$	• vaut $-\frac{5}{4}$	• vaut $\frac{5}{4}$
----------------	------------	-----------------------	-----------------------	----------------------