

Devoir surveillé

Exercice 1

Tableau d'informations n°1.

$x$	$-\infty$	$-1$	$\frac{1}{2}$	$2$	$+\infty$	
Signe de $u(x)$	$+$	$0$	$-$	$-$	$0$	$+$
Signe de $u'(x)$	$-$	$-$	$0$	$+$	$+$	

Le tableau d'informations n°1 ci-dessus fournit des informations sur une fonction  $u$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

- Établir un tableau des variations de la fonction  $u$ .  
On considère maintenant les fonctions  $f$  et  $g$  définies par  $f(x) = \ln[u(x)]$  et  $g(x) = e^{u(x)}$  où  $u$  désigne la fonction de la question précédente.
- Une des deux affirmations suivantes est fausse, laquelle ? Justifier en précisant le bon ensemble de définition :  
Affirmation 1 : « La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  » ;  
Affirmation 2 : « La fonction  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}$  ».
  - Donner les variations des fonctions  $f$  et  $g$ . Énoncer le(s) théorème(s) utilisé(s).
  - Déterminer, en justifiant avec soin,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x)$
  - Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $g(x) = 1$ .
- Voici d'autres informations relatives à la fonction  $u$  et à sa dérivée  $u'$ .

Tableau d'informations n°2.

$x$	$-2$	$0$	$\frac{1}{2}$	$2$	$3$
$u(x)$	4	$-2$	$\frac{9}{4}$	0	4
$u'(x)$	$-5$	1	0	3	5

Terminer chacune des deux phrases **a.** et **b.** par la réponse qui vous semble exacte, parmi celles proposées dans les cadres ci-dessous, en justifiant votre choix.

- La tangente à la courbe représentative de la fonction  $g$  au point d'abscisse 2 est parallèle :

• à l'axe des abscisses	• à la droite d'équation $y = x$	• à la droite d'équation $y = 3x$
-------------------------	----------------------------------	-----------------------------------

- Le nombre  $f'(-2)$  :

• n'existe pas	• vaut $-20$	• vaut $-\frac{4}{5}$	• vaut $-\frac{5}{4}$	• vaut $\frac{5}{4}$
----------------	--------------	-----------------------	-----------------------	----------------------

Exercice 2

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{i}; \vec{v})$ .  
Unité graphique : 0,5 cm.

On note  $j$  le nombre complexe  $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ .  
On considère les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives  $a = 8$ ,  $b = 6j$  et  $c = 8j^2$ .  
Soit  $A'$  l'image de  $B$  par la rotation de centre  $C$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .  
Soit  $B'$  l'image de  $C$  par la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .  
Soit  $C'$  l'image de  $A$  par la rotation de centre  $B$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

- Placer les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  dans le repère donné.
- On appelle  $a'$ ,  $b'$  et  $c'$  les affixes respectives des points  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$ .
  - Calculer  $a'$ . On vérifiera que  $a'$  est un nombre réel.
  - Montrer que  $b' = 16e^{-i\frac{\pi}{3}}$ .  
En déduire que  $O$  est un point de la droite  $(BB')$ .
  - On admet que  $c' = 7 + 7i\sqrt{3}$ .  
Montrer que les droites  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  sont concourantes en  $O$ .
- On se propose désormais de montrer que la distance  $MA + MB + MC$  est minimale lorsque  $M = O$ .
  - Calculer la distance  $OA + OB + OC$ .
  - Montrer que  $j^3 = 1$  et que  $1 + j + j^2 = 0$ .
  - On considère un point  $M$  quelconque d'affixe  $z$  du plan complexe.  
On rappelle que  $a = 8$ ,  $b = 6j$  et  $c = 8j^2$ .  
Déduire des questions précédentes les égalités suivantes :

$$\left| (a - z) + (b - z)j^2 + (c - z)j \right| = \left| a + bj^2 + cj \right| = 22.$$

- On admet que, quels que soient les nombres complexes  $z$ ,  $z'$  et  $z''$  :

$$\left| z + z' + z'' \right| \leq \left| z \right| + \left| z' \right| + \left| z'' \right|.$$

Montrer que  $MA + MB + MC$  est minimale lorsque  $M = O$ .

### Exercice 3

#### Commun Ã tous les candidats

Pour chacune des huit affirmations (entre guillemets) ci -dessous, préciser si elle est vraie ou fausse.

**Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la mention « vrai » ou « faux ».**

Une réponse correcte rapporte 0, 5 point, une réponse incorrecte enlève 0, 25 point, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de points.

Un éventuel total négatif sera ramené à zéro.

1. « Si  $a$  est un nombre réel quelconque et  $f$  une fonction définie et strictement décroissante sur  $]a ; +\infty[$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  ».
2. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $[0 ; +\infty[$ ,  $g$  ne s'annulant pas :  
« Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  et si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -1$  ».
3. « Si  $f$  est une fonction définie sur  $[0 ; +\infty[$  telle que  $0 \leq f(x) \leq \sqrt{x}$  sur  $[0 ; +\infty[$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$  ».

4. On considère un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  du plan.

« Si  $f$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  alors la droite d'équation  $x = 0$  est asymptote à la courbe représentative de  $f$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  ».

5. « La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x^2 + 3x + 1)e^x$  est une solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $y' - y = (2x + 3)e^x$  ».
6. Soient  $A, B, C$  trois points du plan. On appelle  $I$  le barycentre des points  $A$  et  $B$  affectés respectivement des coefficients 3 et  $-2$ .  
« Si  $G$  est le barycentre des points  $A, B$  et  $C$  affectés respectivement des coefficients 3,  $-2$  et 1 alors  $G$  est le milieu du segment  $[CI]$  ».
7. Soient  $A, B, C$  trois points du plan et  $G$  le barycentre de  $A, B$  et  $C$  affectés respectivement des coefficients 3,  $-2$  et 1.  
« L'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 1$  est le cercle de centre  $G$  et de rayon 1 ».
8. Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts du plan. On désigne par  $M$  un point quelconque du plan.  
« Le produit scalaire  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$  est nul si et seulement si  $M = A$  ou  $M = B$  ».