

Candidat ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. – Existence et unicité

Soit s une similitude directe vérifiant $s(A) = O$ et $s(O) = B$. Cette similitude directe est unique si, et seulement si, son écriture complexe dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ est unique, c'est-à-dire si, et seulement si, il existe un unique couple $(a; b)$ avec $a \neq 0$ telle que l'écriture complexe de s soit

$$z' = az + b \quad \text{avec } a \neq 0.$$

On a

$$\begin{aligned} \begin{cases} s(A) = O \\ s(O) = B \end{cases} &\iff \begin{cases} 0 = a \times z_A + b \\ z_B = a \times 0 + b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 0 = a \times 3i + b \\ 6 = a \times 0 + b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 0 = a \times 3i + b \\ 6 = b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = 2i \\ b = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

Il existe donc une unique similitude directe vérifiant $s(A) = O$ et $s(O) = B$; son écriture complexe dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ est

$$z' = 2iz + 6.$$

– Éléments caractéristiques

– Point fixe

Comme $a \neq 1$, la similitude directe admet un point fixe $\Omega(\omega)$. Déterminons l'afixe ω :

$$\begin{aligned} \omega = 2i\omega + 6 &\iff \omega - 2i\omega = 6 \\ &\iff \omega(1 - 2i) = 6 \\ &\iff \omega = \frac{6}{1 - 2i} \\ &\iff \omega = \frac{6(1 + 2i)}{1 + 4} \\ &\iff \omega = \frac{6}{5} + \frac{12}{5}i. \end{aligned}$$

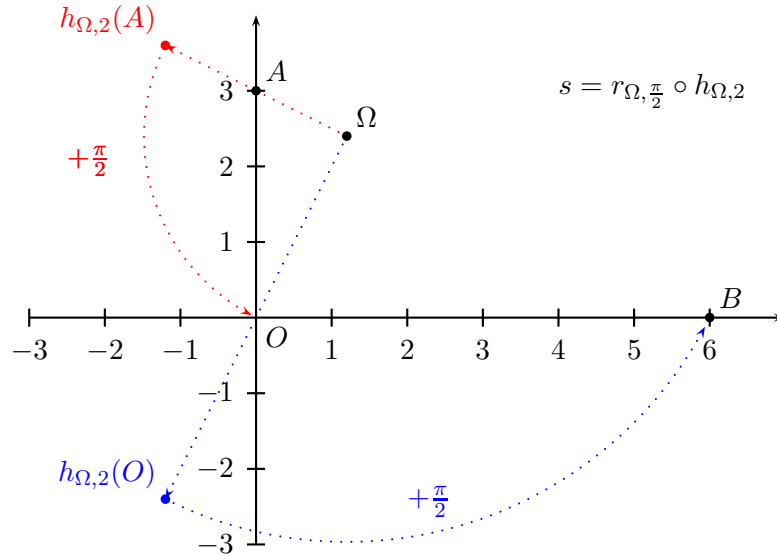
– Rapport et angle

On a

$$a = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Donc s est une similitude directe de rapport $k = 2$ et d'angle $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

En résumé, s est la similitude directe de centre $\Omega\left(\frac{6}{5} + \frac{12}{5}i\right)$, de rapport $k = 2$ et d'angle $\alpha = \frac{\pi}{2}$.



2. Soit s une similitude indirecte vérifiant $s(A) = O$ et $s(O) = B$. Cette similitude indirecte est unique si, et seulement si, son écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$ avec $a \neq 0$ dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ est unique. On a

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} s(A) = O \\ s(O) = B \end{cases} &\iff \begin{cases} 0 = a \times \bar{z}_A + b \\ z_B = a \times 0 + b \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 0 = a \times (-3i) + b \\ 6 = a \times 0 + b \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 0 = -a \times 3i + b \\ 6 = b \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} a = -2i \\ b = 6 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Il existe donc une unique similitude indirecte vérifiant $s(A) = O$ et $s(O) = B$; son écriture complexe dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ est

$$z' = -2i\bar{z} + 6.$$

Partie B

1. Un point invariant $K(z)$ vérifie $f(K) = K$ c'est-à-dire

$$z = -2i\bar{z} + 6.$$

Ainsi, en posant $z = x + iy$ avec x et y réels, on a :

$$\begin{aligned}
 z = -2i\bar{z} + 6 &\iff x + iy = -2i(x - iy) + 6 \\
 &\iff x + iy = -2ix - 2y + 6 \\
 &\iff \begin{cases} x = -2y + 6 \\ y = -2x \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = 4 \\ x = -2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

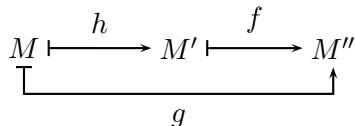
Donc f admet un point invariant et un seul, le point K d'affixe $-2 + 4i$.

2. a. – La transformation g est la composée de la similitude h de rapport $k = \frac{1}{2}$ suivie de la similitude f de rapport $k' = |-2i| = 2$. Il en résulte que g est une similitude de rapport $k \times k' = 1$. Le rapport de g étant égal à 1, g est une isométrie.
- Comme h est une homothétie de centre K , on a $h(K) = K$. Ainsi

$$g(K) = f \circ h(K) = f(h(K)) = f(K) = K.$$

En conclusion, g est une isométrie laissant invariant le point K .

- b. Soit $M(z)$ un point du plan, on note $M'(z')$ son image par h et $M''(z'')$ l'image de $M'(z')$ par f . On a donc $g(M) = M''$.



- Exprimons z' en fonction de z en utilisant l'écriture complexe de h :

$$\begin{aligned} z' &= \frac{1}{2}(z - (-2 + 4i)) + (-2 + 4i) \\ &= \frac{1}{2}z - 1 + 2i. \end{aligned}$$

- Exprimons z'' en fonction de z' en utilisant l'écriture complexe de f :

$$z'' = -2i\overline{z'} + 6.$$

Exprimons z'' en fonction de z , ce qui nous donnera l'écriture complexe de $g = f \circ h$ dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$:

$$\begin{aligned} z'' &= -2i\overline{z'} + 6 \\ &= -2i\overline{\left(\frac{1}{2}z - 1 + 2i\right)} + 6 \\ &= -2i \times \left(\frac{1}{2}\overline{z} - 1 - 2i\right) + 6 \\ &= -i\overline{z} + 2i + 2. \end{aligned}$$

- c. Montrons qu'il existe un point invariant sur l'axe $(O; \vec{v})$ c'est-à-dire un point invariant d'affixe de la forme $z = iy$ avec y réel.

$$\begin{aligned} iy = -i\overline{(iy)} + 2i + 2 &\iff iy = -i \times (-iy) + 2i + 2 \\ &\iff iy = -y + 2i + 2 \\ &\iff y(1 + i) = 2(1 + i) \\ &\iff y = 2. \end{aligned}$$

Il existe donc un unique point invariant $L(2i)$ sur l'axe $(O; \vec{v})$.

Comme la similitude g a deux points fixes K et L , c'est soit une réflexion, soit l'Identité.

Vérifions que le point O (non aligné avec K et L) n'est pas un point fixe :

$$\begin{aligned} z'_O &= -i\overline{z_O} + 2 + 2i \\ &= 2 + 2i \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Le point O n'est pas un point fixe, donc g n'est pas l'identité et alors g est la réflexion d'axe (KL) .

d. On a $f \circ h = g$ d'où

$$f = g \circ h^{-1}.$$

La transformation h^{-1} est la transformation réciproque de h , c'est donc l'homothétie de centre K et de rapport 2. On la note par la suite h' .

La similitude f est donc la composée de l'homothétie h' de centre K et de rapport 2 suivie de la réflexion g d'axe (KL) .

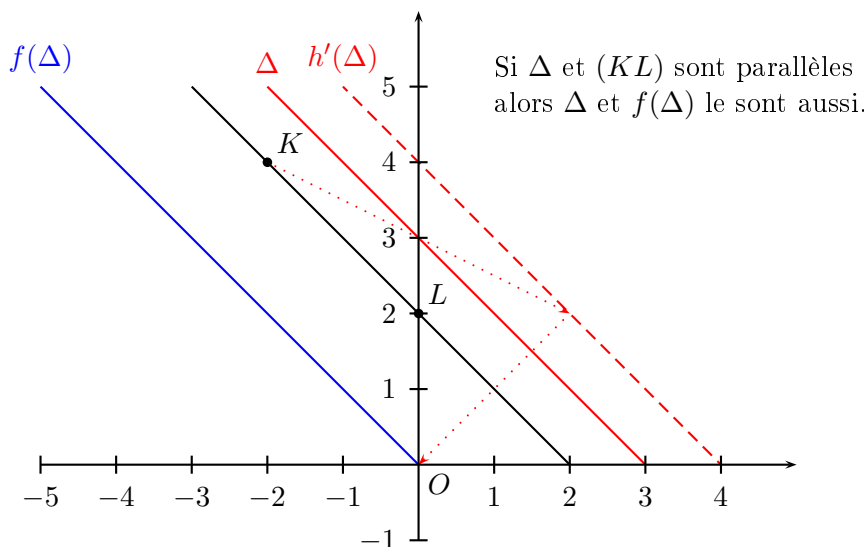
3. On sait que l'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle donc pour toute droite Δ du plan, les droites Δ et $h'(\Delta)$ sont parallèles.

Déterminons la position relative de $h'(\Delta)$ et de son image $g(h'(\Delta)) = f(\Delta)$ par la réflexion d'axe (KL) :

- si les droites $h'(\Delta)$ et (KL) sont parallèles alors son image $f(\Delta)$ est parallèle à $h'(\Delta)$;
- si $h'(\Delta)$ et (KL) sont sécantes en un point I alors $h'(\Delta)$ et $f(\Delta)$ sont aussi sécantes en I .

En conclusion, les droites Δ cherchées dans cette question sont les droites parallèles à (KL) .

– 1^{er} cas



– 2^e cas

