

Exercice

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

1. • $a = 8$, donc A a pour coordonnées $(8 ; 0)$.

$$\bullet b = 6j = 6e^{i\frac{2\pi}{3}} = 6 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -3 + 3\sqrt{3}i.$$

Calculons le module de b :

$$|b| = |6j| = 6 \times |j| = 6 \text{ car } |j| = |e^{i\frac{2\pi}{3}}| = 1.$$

Donc $OB = 6$ et B appartient au cercle de centre O et de rayon 6.

De plus, $\operatorname{Re}(b) = -3$, donc l'abscisse de B est -3 , et $\operatorname{Im}(b) = 3\sqrt{3}$, donc l'ordonnée de B est positive.

Ainsi, B est le point d'intersection du cercle de centre O et de rayon 6 et de la droite d'équation $x = -3$ dont l'ordonnée est positive.

$$\bullet c = 8j^2 = 8e^{i\frac{4\pi}{3}} = 8 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -4 - 4\sqrt{3}i.$$

Calculons le module de c :

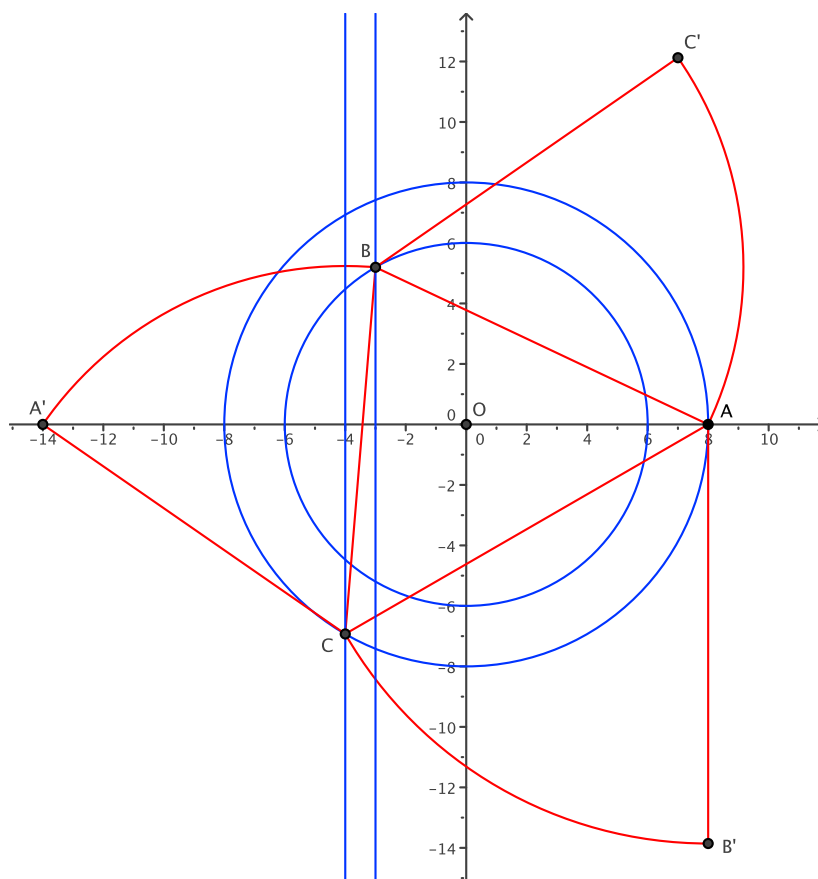
$$|c| = |8j^2| = 8 \times |j|^2 = 8 \text{ car } |j| = |e^{i\frac{2\pi}{3}}| = 1.$$

Donc $OC = 8$ et C appartient au cercle de centre O et de rayon 8.

De plus, $\operatorname{Re}(c) = -4$, donc l'abscisse de C est -4 , et $\operatorname{Im}(c) = -4\sqrt{3}$, donc l'ordonnée de C est négative.

Ainsi, C est le point d'intersection du cercle de centre O et de rayon 8 et de la droite d'équation $x = -4$ dont l'ordonnée est négative.

Remarque : $b = 6j \Leftrightarrow b - 0 = 6(j - 0)$. Ainsi, si on note J le point d'abscisse j , B est l'image de J par l'homothétie de centre O et de rapport 6.



$$\begin{aligned}
2. \text{ a. } A' = R_{(C, \frac{\pi}{3})}(B) &\Leftrightarrow (a' - c) = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - c) \\
&\Leftrightarrow a' = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - c) + c \\
&\Leftrightarrow a' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-3 + 3\sqrt{3}i + 4 + 4\sqrt{3}i) - 4 - 4\sqrt{3}i \\
&\Leftrightarrow a' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1 + 7\sqrt{3}i) - 4 - 4\sqrt{3}i \\
&\Leftrightarrow a' = \frac{1}{2} + \frac{7\sqrt{3}}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{21}{2} - 4 - 4\sqrt{3}i \\
&\Leftrightarrow a' = -14.
\end{aligned}$$

Le point A' a pour affixe -14 qui est bien réel.

$$\begin{aligned}
b. \quad B' = R_{(A, \frac{\pi}{3})}(C) &\Leftrightarrow (b' - a) = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - a) \\
&\Leftrightarrow b' = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - a) + a \\
&\Leftrightarrow b' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-4 - 4\sqrt{3}i - 8) + 8 \\
&\Leftrightarrow b' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-12 - 4\sqrt{3}i) + 8 \\
&\Leftrightarrow b' = -6 - 2\sqrt{3}i - 6\sqrt{3}i + 6 + 8 \\
&\Leftrightarrow b' = 8 - 8\sqrt{3}i \\
&\Leftrightarrow b' = 16\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\
&\Leftrightarrow b' = 16e^{-i\frac{\pi}{3}}.
\end{aligned}$$

Le point B' a pour affixe $16e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

$$\text{On a } b = 6j = 6e^{i\frac{2\pi}{3}}, \text{ d'où } \frac{b}{b'} = \frac{6e^{i\frac{2\pi}{3}}}{16e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{3}{8}e^{i\pi} = -\frac{3}{8}.$$

Ainsi, $(\overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{OB'}) = 0 [\pi]$, ce qui montre que les points O , B et B' sont alignés et donc que le point O appartient à la droite (BB') .

c. Les points A et A' sont sur l'axe des abscisses donc le point O appartient à la droite (AA') .
D'après la question précédente, le point O appartient à la droite (BB') .

$$\text{Enfin, } c = 8j^2 = 8e^{i\frac{4\pi}{3}} \text{ et } c' = 7 + 7i\sqrt{3} = 14\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 14e^{i\frac{\pi}{3}},$$

$$\text{d'où } \frac{c}{c'} = \frac{8e^{i\frac{4\pi}{3}}}{14e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{4}{7}e^{i\pi} = -\frac{4}{7}.$$

Ainsi, $(\overrightarrow{OC} ; \overrightarrow{OC'}) = 0 [\pi]$, ce qui montre, que les points O , C et C' sont alignés et donc que le point O appartient à la droite (CC') .

Les droites (AA') , (BB') et (CC') sont bien concourantes en O .

$$\begin{aligned}
3. \text{ a. } OA + OB + OC &= |a| + |b| + |c| \\
&= 8 + 6 + 8 \\
&= 22.
\end{aligned}$$

$$b. \bullet j^3 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = e^{i2\pi} = 1.$$

$$\begin{aligned}
\bullet 1 + j + j^2 &= 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 \\
&= 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}} \\
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c. } (a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j &= a + bj^2 + cj - z(1 + j^2 + j) \\
&= a + bj^2 + cj && \text{car } 1 + j + j^2 = 0 \\
&= 8 + 6j^3 + 8j^3 \\
&= 8 + 6 + 8 && \text{car } j^3 = 1 \\
&= 22.
\end{aligned}$$

donc, $|(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j| = |a + bj^2 + cj| = |22| = 22$.

d. Soit M un point d'abscisse z , d'après la propriété admise, on a :

$$\begin{aligned}
|(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j| &\leq |a-z| + |(b-z)j^2| + |(c-z)j| \\
&\leq |a-z| + |b-z| |j^2| + |c-z| |j| \\
&\quad \text{car pour tout } z, z' \in \mathbb{C}, \quad |zz'| = |z||z'| \\
&\leq |a-z| + |b-z| + |c-z| && \text{car } |j| = |j^2| = 1
\end{aligned}$$

D'où $22 \leq |a-z| + |b-z| + |c-z|$, d'après la question 3c.

Or, $|a-z| = MA$, $|b-z| = MB$ et $|c-z| = MC$.

Donc, $22 \leq MA + MB + MC$.

Or, d'après la question 3a, $OA + OB + OC = 22$.

On a donc, $OA + OB + OC \leq MA + MB + MC$.

Ce raisonnement ne dépendant pas du point M , on en déduit, pour tout point M du plan :

$$OA + OB + OC \leq MA + MB + MC.$$

La distance $MA + MB + MC$ est donc minimale pour $M = O$.