

Exercice (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On prendra 2 cm pour unité graphique.

Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe 2.

1. a. Déterminer l'affixe du point B_1 image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.

b. Déterminer l'affixe du point B' image de B_1 par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Placer les points A , B et B' .

2. On appelle f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = (1 + i)z + 1.$$

a. Montrer que B a pour image B' par f .

b. Montrer que A est le seul point invariant par f .

c. Établir que pour tout nombre complexe z distinct de i , $\frac{z' - z}{i - z} = -i$.

Interpréter ce résultat en termes de distances puis en termes d'angles.

En déduire une méthode de construction de M' à partir de M , pour M distinct de A .

3. a. Donner la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'ensemble Σ_1 des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|z - 2| = \sqrt{2}$.

b. Démontrer que $z' - 3 - 2i = (1 + i)(z - 2)$.

En déduire que si le point M appartient à Σ_1 , alors son image M' par f appartient à un cercle Σ_2 , dont on précisera le centre et le rayon.

c. Tracer Σ_1 et Σ_2 sur la même figure que A , B et B' .