

Exercice (5 points) Commun à tous les candidats

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(2; 1; 3)$, $B(-3; -1; 7)$ et $C(3; 2; 4)$.

1. Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.

2. Soit (d) la droite de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3 \\ z = 4 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

a. Montrer que la droite (d) est orthogonale au plan (ABC) .

b. Donner une équation cartésienne du plan (ABC) .

3. Soit H le point commun à la droite (d) et au plan (ABC) .

a. Montrer que H est le barycentre de $(A; -2)$, $(B; -1)$ et $(C; 2)$.

b. Déterminer la nature de l'ensemble Γ_1 , des points M de l'espace tels que

$$\left(-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right) = 0.$$

En préciser les éléments caractéristiques.

c. Déterminer la nature de l'ensemble Γ_2 , des points M de l'espace tels que

$$\left\| -2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right\| = \sqrt{29}.$$

En préciser les éléments caractéristiques.

d. Préciser la nature et donner les éléments caractéristiques de l'intersection des ensembles Γ_1 et Γ_2 .

e. Le point $S(-8; 1; 3)$ appartient-il à l'intersection des ensembles Γ_1 et Γ_2 ?