

Exercice (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A d'affixe $3i$ et B d'affixe 6 ; unité graphique : 1 cm.

Partie A

1. Montrer qu'il existe une similitude directe et une seule qui transforme A en O et O en B . Préciser ses éléments caractéristiques.
2. Montrer qu'il existe une similitude indirecte et une seule qui transforme A en O et O en B .

Partie B

1. Soit f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe $z' = -2i\bar{z} + 6$ où \bar{z} désigne le conjugué de z .
Montrer que f possède un point invariant et un seul. On note K ce point.
2. Soit h l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{1}{2}$.
On pose $g = f \circ h$.
 - a. Montrer que g est une isométrie laissant invariant le point K .
 - b. On désigne par M'' l'image du point M d'affixe z par la transformation g .
Montrer que l'écriture complexe de g est $z'' = -i\bar{z} + 2 + 2i$ où z'' est l'affixe de M'' .
 - c. Montrer qu'il existe sur l'axe $(O; \vec{v})$ un unique point invariant par g ; on le note L .
Reconnaître alors la transformation g .
 - d. En déduire que la transformation f est la composée d'une homothétie h' suivie de la réflexion d'axe (KL) . Préciser les éléments caractéristiques de h' .
3. Déterminer les droites Δ telles que $f(\Delta)$ et Δ soient parallèles.