

## Exercice ( 5 points)

### Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

1. On considère l'équation (E) :

$$109x - 226y = 1$$

où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

- Déterminer le pgcd de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation (E) ?
- Montrer que l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme  $(141 + 226k, 68 + 109k)$ , où  $k$  appartient à  $\mathbb{Z}$ .

En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul  $d$  inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul  $e$  tels que  $109d = 1 + 226e$ . (On précisera les valeurs des entiers  $d$  et  $e$ .)

2. Démontrer que 227 est un nombre premier.

3. On note  $A$  l'ensemble des 227 entiers naturels  $a$  tels que  $a \leq 226$ .

On considère les deux fonctions  $f$  et  $g$  de  $A$  dans  $A$  définies de la manière suivante :

à tout entier de  $A$ ,  $f$  associe le reste de la division euclidienne de  $a^{109}$  par 227 ;

à tout entier de  $A$ ,  $g$  associe le reste de la division euclidienne de  $a^{141}$  par 227.

- Vérifier que  $g[f(0)] = 0$ .

*On rappelle le résultat suivant appelé petit théorème de FERMAT :*

**Si  $p$  est un nombre premier et  $a$  un entier non divisible par  $p$  alors  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .**

- Montrer que, quel que soit l'entier non nul  $a$  de  $A$ ,  $a^{226} \equiv 1 \pmod{227}$ .

- En utilisant 1b, en déduire que, quel que soit l'entier non nul  $a$  de  $A$ ,  $g[f(a)] = a$ .

Que peut-on dire de  $f[g(a)] = a$  ?