

Exercice (5 points)

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Unité graphique : 0,5 cm.

On note j le nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

On considère les points A , B et C d'affixes respectives $a = 8$, $b = 6j$ et $c = 8j^2$.

Soit A' l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Soit B' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Soit C' l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1. Placer les points A , B , C , A' , B' et C' dans le repère donné.
2. On appelle a' , b' et c' les affixes respectives des points A' , B' et C' .
 - a. Calculer a' . On vérifiera que a' est un nombre réel.
 - b. Montrer que $b' = 16e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
En déduire que O est un point de la droite (BB') .
 - c. On admet que $c' = 7 + 7i\sqrt{3}$.
Montrer que les droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes en O .
3. On se propose désormais de montrer que la distance $MA + MB + MC$ est minimale lorsque $M = O$.
 - a. Calculer la distance $OA + OB + OC$.
 - b. Montrer que $j^3 = 1$ et que $1 + j + j^2 = 0$.
 - c. On considère un point M quelconque d'affixe z du plan complexe.
On rappelle que $a = 8$, $b = 6j$ et $c = 8j^2$.
Déduire des questions précédentes les égalités suivantes :

$$|(a - z) + (b - z)j^2 + (c - z)j| = |a + bj^2 + cj| = 22.$$

- d. On admet que, quels que soient les nombres complexes z , z' et z'' :

$$|z + z' + z''| \leq |z| + |z'| + |z''|.$$

Montrer que $MA + MB + MC$ est minimale lorsque $M = O$.