

## Exercice ( 8 points)

Commun à tous les candidats

### Partie A

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt.$$

1. Montrer que la fonction  $f : t \mapsto (2-t)e^t$  est une primitive de  $g : t \mapsto (1-t)e^t$  sur  $[0 ; 1]$ .  
En déduire la valeur de  $u_1$ .
2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout  $n$  non nul,

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1. \quad (\text{R})$$

### Partie B

On regarde d'abord ce qu'affichent deux calculatrices différentes pour les valeurs approchées des 25 premiers termes de la suite  $(u_n)$  en utilisant pour le calcul la relation de récurrence (R) ci-dessus.

Voici les résultats affichés par ces deux calculatrices :

Valeur de $n$	Valeur de $u_n$ affichée par la première calculatrice	Valeur de $u_n$ affichée par la deuxième calculatrice
1	7,1828182845E-01	7,1828182846E-01
2	4,3656365691E-01	4,3656365692E-01
3	3,0969097075E-01	3,0969097076E-01
4	2,3876388301E-01	2,3876388304E-01
5	1,9381941508E-01	1,9381941520E-01
6	1,6291649051E-01	1,6291649120E-01
7	1,4041543358E-01	1,4041543840E-01
8	1,2332346869E-01	1,2332350720E-01
9	1,0991121828E-01	1,0991156480E-01
10	9,9112182825E-02	9,9115648000E-01
11	9,0234011080E-02	9,0272128000E-02
12	8,2808132963E-02	8,3265536000E-02
13	7,6505728522E-02	8,2451968000E-02
14	7,1080199309E-02	1,5432755200E-01
15	6,6202989636E-02	1,3149132800E+00
16	5,9247834186E-02	2,0038612480E+01
17	7,2131811612E-03	3,3965641216E+02
18	-8,7016273909E-01	6,1128154189E+03
19	-1,7533092042E+01	1,1614249296E+05
20	-3,5166184085E+02	2,3228488592E+06
21	-7,3858986580E+03	4,8779825043E+07
22	-1,6249077047E+05	1,0731561499E+09
23	-3,7372887209E+06	2,4682591448E+10
24	-8,9694930302E+07	5,9238219474E+11
25	-2,2423732585E+09	1,4809554869E+13

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite  $(u_n)$  quand on examine les résultats obtenus avec la première calculatrice ? et les résultats obtenus avec la deuxième calculatrice ?

### Partie C

Dans cette partie on se propose d'étudier la suite  $(u_n)$  à partir de la relation de définition :

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_n \geqslant 0$ .
2. a. Montrer que pour tout réel  $t$  de l'intervalle  $[0 ; 1]$  et pour tout entier naturel non nul  $n$ ,

$$(1-t)^n e^t \leqslant e \times (1-t)^n.$$

- b. En déduire que pour tout  $n$  non nul,  $u_n \leqslant \frac{e}{n+1}$ .
3. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

### Partie D

Dans cette partie, on se propose d'exploiter la relation de récurrence (R) vérifiée par la suite  $(u_n)$  :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.$$

Étant donné un réel  $a$ , on considère la suite  $(v_n)$  définie par :

$$v_1 = a \quad \text{et pour tout entier naturel non nul } n, v_{n+1} = (n+1)v_n - 1.$$

On s'intéresse à l'influence du terme initial  $a$  de cette suite sur son comportement à l'infini.

1. En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $v_n = u_n + (n!)(a + 2 - e)$  où  $n!$  désigne le produit des  $n$  premiers entiers naturels non nuls.
2. Étudier le comportement de la suite  $(v_n)$  à l'infini suivant les valeurs de  $a$ .  
(On rappelle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$ .)
3. En déduire une raison susceptible d'expliquer les résultats affichés par les deux calculatrices.