

Exercice (7 points)

Commun à tous les candidats

Partie A : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x \ln(x + 1).$$

Sa courbe représentative (\mathcal{C}) dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est donnée en annexe.

1. a. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

b. L'axe des abscisses est-il tangent à la courbe (\mathcal{C}) au point O ?

2. On pose $I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx$.

a. Déterminer trois réels a , b et c tels que, pour tout $x \neq -1$,

$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}.$$

b. Calculer I.

3. À l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu à la question 2, calculer, en unités d'aires, l'aire \mathcal{A} de la partie du plan limitée par la courbe (\mathcal{C}) et les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0,25$ admet une seule solution sur l'intervalle $[0 ; 1]$. On note α cette solution. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

Partie B : étude d'une suite

La suite (u_n) est définie sur \mathbb{N} par $u_n = \int_0^1 x^n \ln(x + 1) dx$.

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

La suite (u_n) converge-t-elle ?

2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$.

En déduire la limite de la suite (u_n) .