

**Exercice 1**

## 1. FAUX

La fonction  $f$  définie sur  $]1 ; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{x}$  est décroissante sur  $]1 ; +\infty[$  mais  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

## 2. FAUX

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $[0 ; +\infty[$  par

$$f(x) = -x^2 \quad \text{et} \quad g(x) = x + 1.$$

On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ ,

$$\text{mais } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty.$$

## 3. VRAI

On a, pour tout  $x$  de  $[0 ; +\infty[$ ,  $0 \leq f(x) \leq \sqrt{x}$ .

*A fortiori*, pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ , on a encore  $0 \leq f(x) \leq \sqrt{x}$ .

Ainsi, en divisant par  $x$  strictement positif, on obtient  $0 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{\sqrt{x}}{x}$ .

Soit, pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ ,  $0 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

Or,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ , d'où, par encadrement,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ .

## 4. FAUX

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \frac{|x|}{x}$ .

Si  $x > 0$  alors  $|x| = x$ , et donc,  $f(x) = 1$ .

Si  $x < 0$  alors  $|x| = -x$ , et donc,  $f(x) = -1$ .

Ainsi, on n'a pas  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ , donc la droite d'équation  $x = 0$  n'est pas asymptote à la courbe représentative de la fonction  $f$ .

*Autre exemple* : Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ .

On a  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$ , or la fonction sinus n'admet pas de limite en l'infini, donc, la fonction  $f$  n'admet pas de limite en 0.

## 5. VRAI

La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que produit de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ , et pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+3)e^x + (x^2+3x+1)e^x \\ &= (x^2+5x+4)e^x. \end{aligned}$$

On a donc, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) - f(x) &= (x^2+5x+4)e^x - (x^2+3x+1)e^x \\ &= (2x+3)e^x. \end{aligned}$$

C'est à dire que la fonction  $f$  est solution de l'équation différentielle

$$y' - y = (2x+3)e^x.$$

## 6. VRAI

Si  $G$  est le barycentre des points  $A$ ,  $B$  et  $C$  affectés respectivement des coefficients 3,  $-2$  et 1 alors, par associativité,  $G$  est le barycentre de  $I$  affecté du coefficient  $3 - 2 = 1$  et du point  $C$  affecté du coefficient 1.

C'est donc l'isobarycentre de  $I$  et  $C$ , c'est à dire que  $G$  est le milieu du segment  $[CI]$ .

## 7. FAUX

Comme  $G$  est le barycentre des points  $A$ ,  $B$  et  $C$  affectés respectivement des coefficients 3,  $-2$  et 1 alors, pour tout point  $M$  du plan,

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} &= 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) - 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) \\ &= 3\overrightarrow{MG} + 3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{MG} - 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC} \\ &= 2\overrightarrow{MG} + (3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) \\ &= 2\overrightarrow{MG} + \vec{0} \quad \text{par définition de } G. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On a alors } \|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| &= 1 \Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MG}\| = 1 \\ &\Leftrightarrow 2 \times \|\overrightarrow{MG}\| = 1 \\ &\Leftrightarrow MG = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

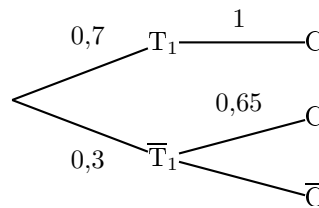
L'ensemble des points  $M$  cherchés est donc le cercle de centre  $G$  et de rayon  $\frac{1}{2}$ .

## 8. FAUX

Soit  $M$  un point du cercle de diamètre  $[AB]$  distinct de  $A$  et de  $B$ . Alors, le triangle  $ABM$  est rectangle en  $M$ . Ainsi,  $\overrightarrow{MA}$  et  $\overrightarrow{MB}$  sont deux vecteurs orthogonaux, et donc le produit scalaire  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$  est nul.

**Exercice 2**

1. Il peut être utile de construire un arbre à partir des données de l'exercice :



Une étude statistique a permis de montrer que le test est positif pour 70 % des écrans neufs sortis directement des chaînes de fabrication, donc  $p(T_1) = 0,7$ .

$T_1$  et  $\overline{T}_1$  forment une partition de l'univers  $\Omega$  donc, d'après le théorème sur les probabilités totales, on a :

$$C = (C \cap T_1) \cup (C \cap \overline{T}_1)$$

Les événements  $(C \cap T_1)$  et  $(C \cap \overline{T}_1)$  étant incompatibles, on a :

$$p(C) = p(C \cap T_1) + p(C \cap \overline{T}_1)$$

soit

$$p(C) = p(T_1) \times p_{T_1}(C) + p(\overline{T}_1) \times p_{\overline{T}_1}(C).$$

Si le test est positif (c'est à dire si l'écran fonctionne correctement), l'écran est acheminé chez le client et donc  $p_{T_1}(C) = 1$ .

Parmi les écrans réparés, seulement 65 % d'entre eux passent le second test avec succès, donc  $p_{\overline{T}_1}(C) = 0,65$ .

$$\begin{aligned} \text{D'où} \quad p(C) &= 0,7 \times 1 + (1 - 0,7) \times 0,65 \\ p(C) &= 0,7 + 0,195 \\ p(C) &= 0,895. \end{aligned}$$

2. a. Trois cas se présentent :

- Le premier test est positif, l'écran est acheminé chez le client.  
Le fabricant dépense 1 000 euros pour fabriquer l'écran et gagne  $a$  euros en le vendant au client.  
 $X$  prend donc la valeur  $(a - 1\,000)$  avec la probabilité  $p(T_1) = 0,70$ .
- Le premier test est négatif et le deuxième positif, l'écran est donc acheminé au client.  
Le fabricant dépense 1 000 euros pour fabriquer l'écran et 50 euros supplémentaires pour le réparer et gagne  $a$  euros en le vendant au client.  
 $X$  prend donc la valeur  $(a - 1\,050)$  avec la probabilité  $p(C \cap \overline{T}_1) = 0,195$ .
- Le premier test est négatif et le deuxième négatif, l'écran est donc détruit.  
Le fabricant a dépensé 1 050 euros et n'a rien gagné.  
On pose  $T_2$  l'événement : « Le second test est positif ».  
 $X$  prend donc la valeur  $(-1\,050)$  avec la probabilité  $p(\overline{T}_1 \cap \overline{T}_2)$ .  

$$\begin{aligned} p(\overline{T}_1 \cap \overline{T}_2) &= p(\overline{T}_1) \times p_{\overline{T}_1}(\overline{T}_2) \\ &= 0,3 \times (1 - p_{\overline{T}_1}(T_2)) \\ &= 0,3 \times (1 - 0,65) \\ p(\overline{T}_1 \cap \overline{T}_2) &= 0,105. \end{aligned}$$

La loi de  $X$  est définie par :

$k$	$-1\,050$	$a - 1\,050$	$a - 1\,000$
$p(X = k)$	0,105	0,195	0,7

b. Par définition,

$$\begin{aligned} E(X) &= -1\,050 \times 0,105 + (a - 1\,050) \times 0,195 + (a - 1\,000) \times 0,7 \\ E(X) &= -110,25 + 0,195a - 204,75 + 0,7a - 700 \\ E(X) &= 0,895a - 1\,015. \end{aligned}$$

c. L'entreprise fait des bénéfices si et seulement si son espérance de gain est positive, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\begin{aligned} 0,895a - 1\,015 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a &\geq \frac{1\,015}{0,895}. \end{aligned}$$

$$\text{Or, } \frac{1\,015}{0,895} \approx 1\,134,078.$$

Donc l'entreprise peut faire des bénéfices à partir d'un prix de vente de 1135 euros, en arrondissant à l'entier supérieur par excès.

**Exercice 3****Partie A**

1.  $f$  est dérivable sur  $[0 ; 1]$  en tant que produit de fonctions dérivables sur  $[0 ; 1]$ .

Pour tout  $t \in [0 ; 1]$ , on a :

$$\begin{aligned} f'(t) &= -1 \times e^t + (2-t)e^t \\ &= [-1 + (2-t)]e^t \\ &= (1-t)e^t \\ &= g(t). \end{aligned}$$

Donc  $f$  est **une** primitive de  $g$  sur  $[0 ; 1]$ .

On en déduit :

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_0^1 (1-t)e^t dt \\ &= \int_0^1 g(t) dt \\ &= [f(t)]_0^1 \\ &= f(1) - f(0) \\ &= 1 \times e^1 - 2 \times e^0 \\ &= e - 2. \end{aligned}$$

2. Pour tout entier  $n$  non nul, on a :  $u_{n+1} = \int_0^1 (1-t)^{n+1}e^t dt$ .

Soient  $u$  et  $v$  les fonctions définies sur  $[0 ; 1]$  par

$$u(t) = (1-t)^{n+1} \quad \text{et} \quad v(t) = e^t.$$

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables sur  $[0 ; 1]$ , et pour tout  $t \in [0 ; 1]$  :

$$u'(t) = -(n+1)(1-t)^n \quad \text{et} \quad v'(t) = e^t.$$

$u'$  et  $v'$  sont deux fonctions continues sur  $[0 ; 1]$ .

Effectuons une intégration par parties :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \int_0^1 u(t)v'(t) dt \\ &= [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 u'(t)v(t) dt \\ &= 0 - 1 - \int_0^1 -(n+1)(1-t)^n e^t dt \\ &= (n+1)u_n - 1. \end{aligned}$$

**Partie B**

En regardant les résultats présentés par la première calculatrice, on peut conjecturer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty, \text{ et en regardant ceux présentés par la deuxième, on peut conjecturer que } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

**Partie C**

1. Soit  $n$  un entier naturel non nul, montrons que pour tout  $t \in [0 ; 1]$ ,  $(1 - t)^n e^t \geq 0$ .

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} 0 &\leq t \leq 1 \\ \Leftrightarrow 0 &\geq -t \geq -1 \\ \Leftrightarrow 1 &\geq 1 - t \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $t \in [0 ; 1]$ ,  $(1 - t)^n \geq 0$ .

La fonction exponentielle étant positive, on a bien pour tout  $t \in [0 ; 1]$ ,  $(1 - t)^n e^t \geq 0$ .

Comme  $0 < 1$ , on en déduit :

$$u_n = \int_0^1 (1 - t)^n e^t dt \geq 0.$$

2. a. La fonction exponentielle est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , donc pour tout  $t \in [0 ; 1]$ , on a :

$$e^0 \leq e^t \leq e^1.$$

C'est à dire, pour tout  $t \in [0 ; 1]$  :

$$1 \leq e^t \leq e.$$

Soit  $n$  un entier naturel non nul fixé.

D'après la question 1 de la partie C, pour tout  $t \in [0 ; 1]$ ,  $(1 - t)^n \geq 0$ .

Ainsi, pour tout  $t \in [0 ; 1]$ , on a

$$(1 - t)^n \leq e^t (1 - t)^n \leq e (1 - t)^n.$$

Ces inégalités ne dépendant pas de l'entier naturel  $n$  non nul fixé, on déduit que pour tout entier naturel  $n$  non nul et pour tout  $t \in [0 ; 1]$ ,

$$e^t (1 - t)^n \leq e (1 - t)^n.$$

- b. D'après la question 2a, pour tout  $t \in [0 ; 1]$  et pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$e^t (1 - t)^n \leq e (1 - t)^n.$$

Comme  $0 \leq 1$ , en intégrant on obtient :

$$\int_0^1 e^t (1 - t)^n dt \leq \int_0^1 e (1 - t)^n dt.$$

C'est à dire, pour tout entier naturel  $n$  non nul :

$$u_n \leq e \int_0^1 (1 - t)^n dt.$$

Soit  $n$  entier naturel non fixé.

Posons,  $I_n = e \int_0^1 (1 - t)^n dt$ .

La fonction à intégrer est du type  $u'u^n$  avec pour tout réel  $t$ ,  $u(t) = 1 - t$ . La fonction  $u$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  (donc sur  $[0 ; 1]$ ), et pour tout réel  $t$ ,  $u'(t) = -1$ .

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 I_n &= e \times (-1) \times \int_0^1 (-1) \times (1-t)^n dt \\
 &= -e \left[ \frac{(1-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \\
 &= -e \left( 0 - \frac{1}{n+1} \right) \\
 &= \frac{e}{n+1}.
 \end{aligned}$$

Ces calculs ne dépendant pas de l'entier naturel  $n$  non nul fixé, on en déduit que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $I_n = \frac{e}{n+1}$ , et donc  $u_n \leq \frac{e}{n+1}$ .

3. D'après la question 1 de la partie C, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_n \geq 0$ .

D'après la question précédente, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_n \leq \frac{e}{n+1}$ .

Donc, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $0 \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$ .

Or,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$ .

Donc, d'après le théorème des gendarmes,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

## Partie D

1. Effectuons un raisonnement par récurrence.

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, soit l'hypothèse  $(H_n)$  : «  $v_n = u_n + (n!)(a+2-e)$  ».

**Initialisation :**

- $v_1 = a$ .
- $u_1 + (1!)(a+2-e) = (e-2) + (a+2-e) = a$ .

Donc  $(H_1)$  est vraie.

**Hérédité :**

On suppose qu'il existe un entier  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $(H_n)$  est vraie.

Démontrons que  $(H_{n+1})$  est vraie, c'est à dire que  $v_{n+1} = u_{n+1} + ((n+1)!)(a+2-e)$ .

Par définition,  $v_{n+1} = (n+1)v_n - 1$ .

Or, par hypothèse de récurrence,  $v_n = u_n + (n!)(a+2-e)$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Donc, } v_{n+1} &= (n+1)[u_n + (n!)(a+2-e)] - 1 \\
 &= (n+1)u_n + (n+1)(n!)(a+2-e) - 1 \\
 &= (n+1)u_n - 1 + ((n+1)!)(a+2-e) \quad \text{car } (n+1)(n!) = ((n+1)!) \\
 &= u_{n+1} + ((n+1)!)(a+2-e) \quad \text{car } (u_n) \text{ satisfait (R)}
 \end{aligned}$$

Donc  $(H_{n+1})$  est vraie.

**Bilan :**

$(H_1)$  est vraie, et  $(H_n)$  est héréditaire, donc pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(H_n)$  est vraie.

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n = u_n + (n!)(a+2-e)$ .

2. D'après la question précédente, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n = u_n + (n!)(a+2-e)$ .

Or, d'après la question 3 de la partie C,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ . De plus,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n!) = +\infty$ .

Donc,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  dépend du signe de  $(a+2-e)$ .

- Si  $a + 2 - e > 0$ , c'est à dire si  $a > e - 2$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n!)(a + 2 - e) = +\infty$ , et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .
  - Si  $a + 2 - e < 0$ , c'est à dire si  $a < e - 2$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n!)(a + 2 - e) = -\infty$ , et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ .
  - Si  $a + 2 - e = 0$ , c'est à dire si  $a = e - 2$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(n!)(a + 2 - e) = 0$ , soit pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n = u_n$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ .
3. La calculatrice utilise pour les calculs la relation de récurrence (R).  
Elle détermine donc les termes successifs de la suite  $(v_n)$  ayant comme premier terme  $v_1 = u_1 = e - 2$ .  
D'après la question précédente, on devrait avoir  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ .  
Cependant, la calculatrice ne travaille qu'avec des valeurs approchées et

$$0,71828182845 < e - 2 < 0,71828182846.$$

La première calculatrice utilise pour  $v_1$  une valeur strictement inférieure à  $e - 2$ .

D'après la question précédente,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ .

La seconde calculatrice utilise pour  $v_1$  une valeur strictement supérieure à  $e - 2$ .

D'après la question précédente,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .

Une raison susceptible d'expliquer les résultats affichés par les deux calculatrices est la manière dont elles arrondissent  $e - 2$ .

### Remarque :

Soit  $(u_n)$  une suite définie par récurrence par : 
$$\begin{cases} u_{n+1} = f(n, u_n) \\ u_0 = a, \quad a \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Cet exercice illustre le fait qu'en fonction de la valeur de  $a$ , le comportement de  $(u_n)$  peut être extrêmement différent.

## Exercice 4

### Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

1. •  $a = 8$ , donc  $A$  a pour coordonnées  $(8 ; 0)$ .

$$\bullet b = 6j = 6e^{i\frac{2\pi}{3}} = 6 \left( -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -3 + 3\sqrt{3}i.$$

Calculons le module de  $b$  :

$$|b| = |6j| = 6 \times |j| = 6 \text{ car } |j| = |e^{i\frac{2\pi}{3}}| = 1.$$

Donc  $OB = 6$  et  $B$  appartient au cercle de centre  $O$  et de rayon 6.

De plus,  $\Re(b) = -3$ , donc l'abscisse de  $B$  est  $-3$ , et  $\Im(b) = 3\sqrt{3}$ , donc l'ordonnée de  $B$  est positive.

Ainsi,  $B$  est le point d'intersection du cercle de centre  $O$  et de rayon 6 et de la droite d'équation  $x = -3$  dont l'ordonnée est positive.

$$\bullet c = 8j^2 = 8e^{i\frac{4\pi}{3}} = 8 \left( -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -4 - 4\sqrt{3}i.$$

Calculons le module de  $c$  :

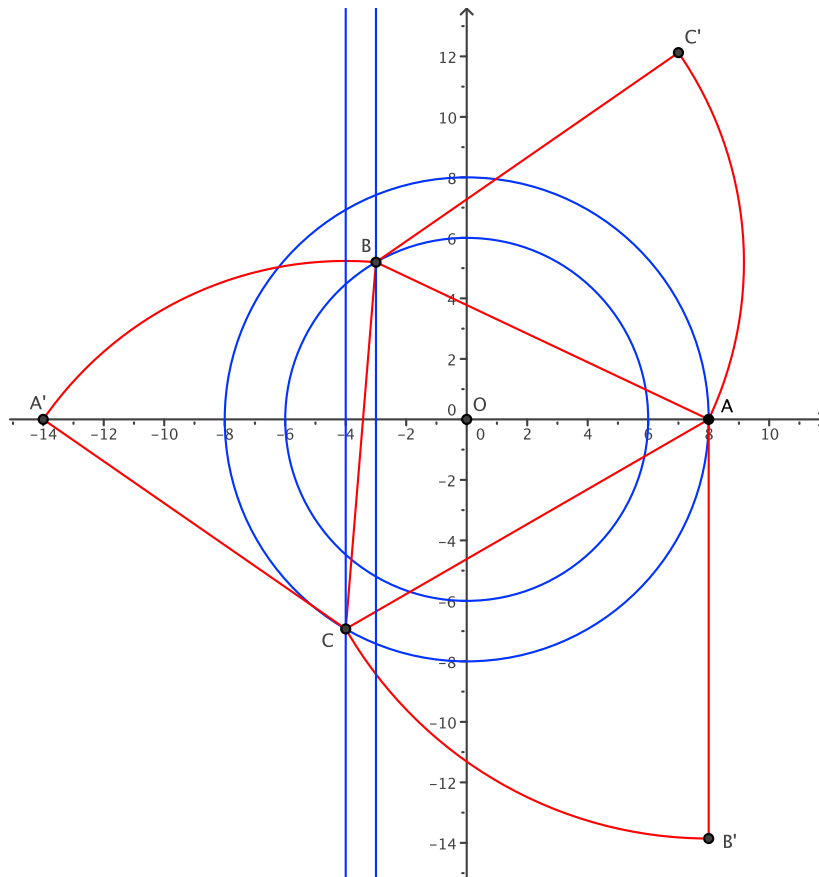
$$|c| = |8j^2| = 8 \times |j|^2 = 8 \text{ car } |j| = |e^{i\frac{2\pi}{3}}| = 1.$$

Donc  $OC = 8$  et  $C$  appartient au cercle de centre  $O$  et de rayon 8.

De plus,  $\Re(c) = -4$ , donc l'abscisse de  $C$  est  $-4$ , et  $\Im(c) = -4\sqrt{3}$ , donc l'ordonnée de  $C$  est négative.

Ainsi,  $C$  est le point d'intersection du cercle de centre  $O$  et de rayon 8 et de la droite d'équation  $x = -4$  dont l'ordonnée est négative.

**Remarque :**  $b = 6j \Leftrightarrow b - 0 = 6(j - 0)$ . Ainsi, si on note  $J$  le point d'abscisse  $j$ ,  $B$  est l'image de  $J$  par l'homothétie de centre  $O$  et de rapport 6.



$$\begin{aligned}
 2. \text{ a. } A' = R_{(C, \frac{\pi}{3})}(B) &\Leftrightarrow (a' - c) = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - c) \\
 &\Leftrightarrow a' = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - c) + c \\
 &\Leftrightarrow a' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-3 + 3\sqrt{3}i + 4 + 4\sqrt{3}i) - 4 - 4\sqrt{3}i \\
 &\Leftrightarrow a' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1 + 7\sqrt{3}i) - 4 - 4\sqrt{3}i \\
 &\Leftrightarrow a' = \frac{1}{2} + \frac{7\sqrt{3}}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{21}{2} - 4 - 4\sqrt{3}i \\
 &\Leftrightarrow a' = -14.
 \end{aligned}$$

Le point  $A'$  a pour affixe  $-14$  qui est bien réel.



$$\begin{aligned}
\text{b. } B' = R_{(A, \frac{\pi}{3})}(C) &\Leftrightarrow (b' - a) = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - a) \\
&\Leftrightarrow b' = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - a) + a \\
&\Leftrightarrow b' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-4 - 4\sqrt{3}i - 8) + 8 \\
&\Leftrightarrow b' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-12 - 4\sqrt{3}i) + 8 \\
&\Leftrightarrow b' = -6 - 2\sqrt{3}i - 6\sqrt{3}i + 6 + 8 \\
&\Leftrightarrow b' = 8 - 8\sqrt{3}i \\
&\Leftrightarrow b' = 16\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\
&\Leftrightarrow b' = 16e^{-i\frac{\pi}{3}}.
\end{aligned}$$

Le point  $B'$  a pour affixe  $16e^{-i\frac{\pi}{3}}$ .

$$\text{On a } b = 6j = 6e^{i\frac{2\pi}{3}}, \text{ d'où } \frac{b}{b'} = \frac{6e^{i\frac{2\pi}{3}}}{16e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{3}{8}e^{i\pi} = -\frac{3}{8}.$$

Ainsi,  $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OB'}) = 0 [\pi]$ , ce qui montre que les points  $O$ ,  $B$  et  $B'$  sont alignés et donc que le point  $O$  appartient à la droite  $(BB')$ .

- c. Les points  $A$  et  $A'$  sont sur l'axe des abscisses donc le point  $O$  appartient à la droite  $(AA')$ .

D'après la question précédente, le point  $O$  appartient à la droite  $(BB')$ .

$$\text{Enfin, } c = 8j^2 = 8e^{i\frac{4\pi}{3}} \text{ et } c' = 7 + 7i\sqrt{3} = 14\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 14e^{i\frac{\pi}{3}},$$

$$\text{d'où } \frac{c}{c'} = \frac{8e^{i\frac{4\pi}{3}}}{14e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{4}{7}e^{i\pi} = -\frac{4}{7}.$$

Ainsi,  $(\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OC'}) = 0 [\pi]$ , ce qui montre, que les points  $O$ ,  $C$  et  $C'$  sont alignés et donc que le point  $O$  appartient à la droite  $(CC')$ .

Les droites  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  sont bien concourantes en  $O$ .

$$\begin{aligned}
3. \text{ a. } OA + OB + OC &= |a| + |b| + |c| \\
&= 8 + 6 + 8 \\
&= 22.
\end{aligned}$$

$$\text{b. } \bullet j^3 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = e^{i2\pi} = 1.$$

$$\begin{aligned}
\bullet 1 + j + j^2 &= 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 \\
&= 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}} \\
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c. } (a - z) + (b - z)j^2 + (c - z)j &= a + bj^2 + cj - z(1 + j^2 + j) \\
&= a + bj^2 + cj && \text{car } 1 + j + j^2 = 0 \\
&= 8 + 6j^3 + 8j^3 \\
&= 8 + 6 + 8 && \text{car } j^3 = 1 \\
&= 22.
\end{aligned}$$

$$\text{donc, } |(a - z) + (b - z)j^2 + (c - z)j| = |a + bj^2 + cj| = |22| = 22.$$

- d. Soit  $M$  un point d'abscisse  $z$ , d'après la propriété admise, on a :

$$\begin{aligned}
|(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j| &\leq |a-z| + |(b-z)j^2| + |(c-z)j| \\
&\leq |a-z| + |b-z| |j^2| + |c-z| |j| \\
&\quad \text{car pour tout } z, z' \in \mathbb{C}, \quad |zz'| = |z||z'| \\
&\leq |a-z| + |b-z| + |c-z| \quad \text{car } |j| = |j^2| = 1
\end{aligned}$$

D'où  $22 \leq |a-z| + |b-z| + |c-z|$ , d'après la question 3c.

Or,  $|a-z| = MA$ ,  $|b-z| = MB$  et  $|c-z| = MC$ .

Donc,  $22 \leq MA + MB + MC$ .

Or, d'après la question 3a,  $OA + OB + OC = 22$ .

On a donc,  $OA + OB + OC \leq MA + MB + MC$ .

Ce raisonnement ne dépendant pas du point  $M$ , on en déduit, pour tout point  $M$  du plan :

$$OA + OB + OC \leq MA + MB + MC.$$

La distance  $MA + MB + MC$  est donc minimale pour  $M = O$ .

#### Exercice 4

##### Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

1. a. 109 est un nombre premier et 226 n'est pas un multiple de 109 donc :

$$\text{pgcd}(109, 226) = 1.$$

L'équation diophantienne (E) admet donc des couples solutions.

- b. • Vérifions que les couples de la forme  $(141+226k, 68+109k)$  sont bien des solutions de (E) :

$$109 \times (141 + 226k) - 226 \times (68 + 109k) = 109 \times 141 - 226 \times 68 = 1.$$

- Vérifions ensuite que ces couples sont les seules solutions de (E).

Notons  $(x ; y)$  un couple solution quelconque (il y en a d'après la question 1a).

$$\text{On écrit le système : } \begin{cases} 109x - 226y = 1 \\ 109 \times 141 - 226 \times 68 = 1 \end{cases}$$

En retranchant membre à membre :

$$\begin{aligned}
109(x - 141) - 226(y - 68) &= 0 \\
109(x - 141) &= 226(y - 68) \quad (*)
\end{aligned}$$

On en déduit que 226 divise le produit  $109(x - 141)$ .

Mais, par ailleurs,  $\text{pgcd}(226, 109) = 1$ .

Donc, d'après le théorème de GAUSS, 226 divise  $x - 141$ .

Il existe donc un entier relatif  $k$  tel que :

$$\begin{aligned}
x - 141 &= 226k \\
\Leftrightarrow x &= 141 + 226k.
\end{aligned}$$

En remplaçant dans la relation (\*), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
109 \times 226k &= 226(y - 68) \\
\Leftrightarrow 109k &= (y - 68) \\
\Leftrightarrow y &= 109k + 68.
\end{aligned}$$

Conclusion : les couples d'entiers  $(x ; y)$  solutions de l'équation diophantienne  $109x - 226y = 1$  sont de la forme  $(x ; y) = (141 + 226k ; 109k + 68)$  où  $k$  est un élément de  $\mathbb{Z}$ .

Recherchons la valeur  $d$  de  $x = 141 + 226k$  telle que :

$$\begin{aligned} 0 &\leq d \leq 226 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq 141 + 226k \leq 226 \\ \Leftrightarrow -141 &\leq 226k \leq 85 \\ \Leftrightarrow -\frac{141}{226} &\leq k \leq \frac{85}{226}. \end{aligned}$$

Comme  $k$  est un entier, la seule possibilité est  $k = 0$ . D'où  $d = 141$ .

Et lorsque  $k$  vaut 0, la valeur  $e$  de  $y$  est alors égale à 68.

Ainsi, on a bien :  $109d = 1 + 226e$  avec  $d$  inférieur ou égal à 226.

2. On teste si 227 est divisible par les nombres premiers inférieurs à  $\sqrt{227}$  :  
227 n'est pas divisible par 2, par 3, par 5, par 7, par 11, ni par 13, donc 227 est un nombre premier.
3. a.  $f(0)$  est le reste de la division euclidienne de  $0^{109}$  par 227 donc  $f(0) = 0$ .  
On a donc  $g[f(0)] = g(0)$ .  
Or,  $g(0)$  est le reste de la division euclidienne de  $0^{141}$  par 227 donc  $g(0) = 0$ .  
Finalement,  $g[f(0)] = 0$ .
- b. Soit  $a$  un élément non nul de  $A$  ( $A$  est l'ensemble des entiers naturels compris entre 0 et 226). Donc l'entier  $a$  n'est pas divisible par 227.  
Comme 227 est premier (d'après la question 2), d'après le théorème de FERMAT, on a :

$$a^{226} \equiv 1 [227].$$

Ceci étant valable pour tout élément non nul  $a$  de  $A$ .

- c. On a modulo 227 :  $g[f(a)] \equiv (f(a))^{141} \equiv a^{109 \times 141} [227]$ .  
Mais d'après la question 1b, on sait que  $109 \times 141 = 1 + 226 \times 68$ .  
D'où :

$$g[f(a)] \equiv a^{109 \times 141} \equiv a^{226 \times 68} [227].$$

Et, d'après la question 3b, on sait que  $a^{226} \equiv 1 [227]$  donc :

$$g[f(a)] \equiv a [227].$$

Et comme  $g[f(a)]$  et  $a$  sont tous deux inférieurs à 227, on peut écrire :

$$g[f(a)] = a.$$

Les fonctions  $f$  et  $g$  commutent ; en effet, pour tout entier  $a$  :

$$f[g(a)] \equiv (g(a))^{109} \equiv a^{109 \times 141} \equiv g[f(a)] [227].$$

On a donc également, pour tout entier  $a$  non nul de  $A$  :

$$f[g(a)] = a.$$