

Exercice 1 (5 points) Commun à tous les candidats

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(2; 1; 3)$, $B(-3; -1; 7)$ et $C(3; 2; 4)$.

1. Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.

2. Soit (d) la droite de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3 \\ z = 4 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

a. Montrer que la droite (d) est orthogonale au plan (ABC) .

b. Donner une équation cartésienne du plan (ABC) .

3. Soit H le point commun à la droite (d) et au plan (ABC) .

a. Montrer que H est le barycentre de $(A; -2)$, $(B; -1)$ et $(C; 2)$.

b. Déterminer la nature de l'ensemble Γ_1 , des points M de l'espace tels que

$$(-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0.$$

En préciser les éléments caractéristiques.

c. Déterminer la nature de l'ensemble Γ_2 , des points M de l'espace tels que

$$\| -2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \| = \sqrt{29}.$$

En préciser les éléments caractéristiques.

d. Préciser la nature et donner les éléments caractéristiques de l'intersection des ensembles Γ_1 et Γ_2 .

e. Le point $S(-8; 1; 3)$ appartient-il à l'intersection des ensembles Γ_1 et Γ_2 ?

Exercice 2 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On prendra 2 cm pour unité graphique.

Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe 2.

1. a. Déterminer l'affixe du point B_1 image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.

b. Déterminer l'affixe du point B' image de B_1 par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
Placer les points A , B et B' .

2. On appelle f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = (1 + i)z + 1.$$

a. Montrer que B a pour image B' par f .

b. Montrer que A est le seul point invariant par f .

- c. Établir que pour tout nombre complexe z distinct de i , $\frac{z' - z}{i - z} = -i$.
Interpréter ce résultat en termes de distances puis en termes d'angles.
En déduire une méthode de construction de M' à partir de M , pour M distinct de A .
3. a. Donner la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'ensemble Σ_1 des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|z - 2| = \sqrt{2}$.
b. Démontrer que $z' - 3 - 2i = (1 + i)(z - 2)$.
En déduire que si le point M appartient à Σ_1 , alors son image M' par f appartient à un cercle Σ_2 , dont on précisera le centre et le rayon.
c. Tracer Σ_1 et Σ_2 sur la même figure que A , B et B' .

Exercice 2 (5 points)**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A d'affixe $3i$ et B d'affixe 6 ; unité graphique : 1 cm.

Partie A

- Montrer qu'il existe une similitude directe et une seule qui transforme A en O et O en B . Préciser ses éléments caractéristiques.
- Montrer qu'il existe une similitude indirecte et une seule qui transforme A en O et O en B .

Partie B

- Soit f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe $z' = -2i\bar{z} + 6$ où \bar{z} désigne le conjugué de z .
Montrer que f possède un point invariant et un seul. On note K ce point.
- Soit h l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{1}{2}$.
On pose $g = f \circ h$.
 - Montrer que g est une isométrie laissant invariant le point K .
 - On désigne par M'' l'image du point M d'affixe z par la transformation g .
Montrer que l'écriture complexe de g est $z'' = -i\bar{z} + 2 + 2i$ où z'' est l'affixe de M'' .
 - Montrer qu'il existe sur l'axe $(O; \vec{v})$ un unique point invariant par g ; on le note L .
Reconnaître alors la transformation g .
 - En déduire que la transformation f est la composée d'une homothétie h' suivie de la réflexion d'axe (KL) . Préciser les éléments caractéristiques de h' .
- Déterminer les droites Δ telles que $f(\Delta)$ et Δ soient parallèles.

Exercice 3 (7 points)

Commun à tous les candidats

Partie A : étude d'une fonctionSoit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x \ln(x + 1).$$

Sa courbe représentative (\mathcal{C}) dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est donnée en annexe.1. a. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.b. L'axe des abscisses est-il tangent à la courbe (\mathcal{C}) au point O ?2. On pose $I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx$.a. Déterminer trois réels a , b et c tels que, pour tout $x \neq -1$,

$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}.$$

b. Calculer I .3. À l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu à la question 2, calculer, en unités d'aires, l'aire \mathcal{A} de la partie du plan limitée par la courbe (\mathcal{C}) et les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.4. Montrer que l'équation $f(x) = 0,25$ admet une seule solution sur l'intervalle $[0 ; 1]$. On note α cette solution. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .**Partie B : étude d'une suite**La suite (u_n) est définie sur \mathbb{N} par $u_n = \int_0^1 x^n \ln(x + 1) dx$.1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .La suite (u_n) converge-t-elle ?2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$.En déduire la limite de la suite (u_n) .**Exercice 4** (3 points)

Commun à tous les candidats

La durée de vie d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ , avec $\lambda > 0$.Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant t est égale à

$$p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

1. Déterminer λ , arrondi à 10^{-2} près, pour que la probabilité $p(X > 6)$ soit égale à 0,3.Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,2$.

2. À quel instant t , à un mois près, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de 0,5 ?
3. Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est $e^{-0,4}$.
4. Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est, à 10^{-2} près, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?
5. On considère un lot de 10 robots fonctionnant de manière indépendante.
Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années.

Annexe

Exercice 3

Représentation graphique de la fonction f obtenue à l'aide d'un tableurCourbe (\mathcal{C})