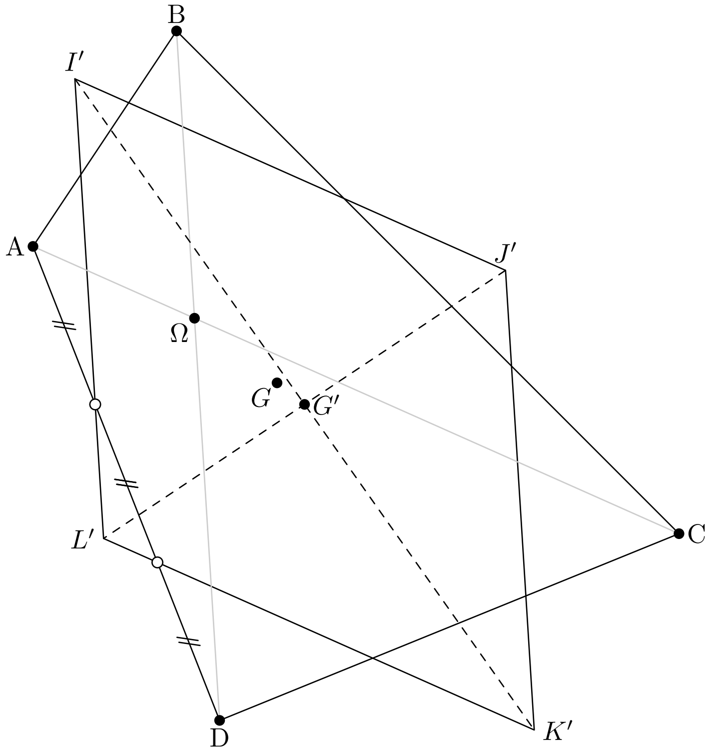
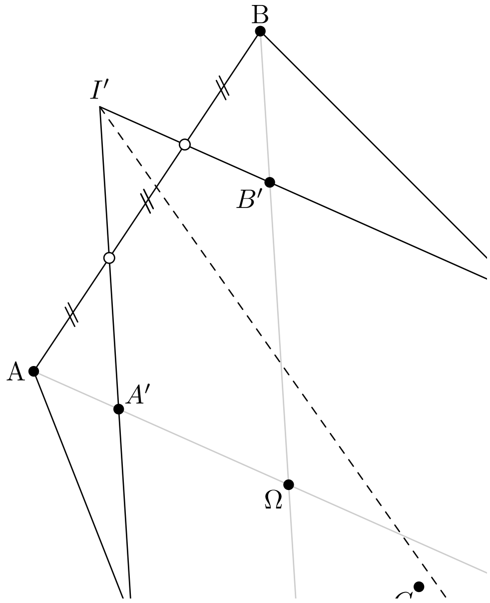
Un théorème de Wirtinger

On découpe en trois les côtés d'un quadrilatère $ABCD$, et l'on construit un quadrilatère $I'J'K'L'$ comme sur la figure ci-contre.
Montrer que le centre de gravité de $ABCD$, les points d'intersection des diagonales de $ABCD$ et de $I'J'K'L'$, sont alignés.





Soit I, J, K et L les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$.

Première méthode

Montrons que $I'J'K'L'$ est l'image de $IJKL$ par une homothétie I est le milieu de $[AB]$, par conséquent I est l'isobarycentre de A et de B, donc

$$2\overrightarrow{\Omega I} = \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} \qquad (1)$$

D'autre part, par hypothèse, l'homothétie de centre B et de rapport 3, tranforme $(I'J')$ en (AC), B, B' et Ω sont alignés avec B' sur $(I'J')$ et Ω sur (AC), donc Ω est l'image de B' par cette homothétie on en déduit que $\overrightarrow{B\Omega} = 3\overrightarrow{BB'}$.
De même, on montre que $\overrightarrow{A\Omega} = 3\overrightarrow{AA'}$.
Par ailleurs, $(I'B')$ et $(A'\Omega)$ ainsi que (IB') et $(A'\Omega)$ sont parallèles, donc $I'B'\Omega A'$ est un parralélogramme. Donc

$$\overrightarrow{\Omega I'} = \overrightarrow{\Omega A'} + \overrightarrow{\Omega B'} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B}) \qquad (2)$$

De **(1)** et de **(2)**, on obtient $\overrightarrow{\Omega I'} = \frac{4}{3}\overrightarrow{\Omega I}$
Donc I' est l'image de I par l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{4}{3}$. Soit h cette homothétie.
De la même manière on montre que :

$$\begin{aligned} h: \quad I &\longrightarrow I' \\ J &\longrightarrow J' \\ K &\longrightarrow K' \\ L &\longrightarrow L' \end{aligned}$$

Montrons que $IJKL$ et $I'J'K'L'$ sont des parallèlogrammes L'homothétie de centre B de rapport 2 transfome I en A et J en C, donc $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, de même l'homothétie de centre D de rapport 2, nous permet d'écrire $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Donc $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$, donc $IJKL$ est un parallèlogramme, donc son image par h, le quadrilatère $I'J'K'L'$ également.

Conclusion G est le barycentre de

$$\{(A;1);(B;1);(C,1);(D;1),\}$$

d'après le théorème d'associativité G est le barycentre de $\{(I;2);(K;2)\}$. Comme $IJKL$ est un parallèlogramme, G est le point d'intersection des diagonales de $IJKL$, donc son image par h est le point d'intersection des diagonales de $I'J'K'L'$ c'est à dire G'. On en déduit que $h(G) = G'$.
Conclusion Ω, G et G' sont alignés.

Deuxième méthode

Dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega B})$ on a : $A(a,0)$, $B(0,1)$, $C(1,0)$, $D(0,d)$.
G est le barycentre de $\{(A;1);(B;1);(C,1);(D;1)\}$ donc $G(\frac{a+1}{4}, \frac{d+1}{4})$.
Par hypothèse, l'homothétie de centre B et de rapport 3, tranforme (IJ) en (AC), B, B' et Ω sont alignés avec B' sur (IJ) et Ω sur (AC), donc $\overrightarrow{B\Omega} = 3\overrightarrow{BB'}$. On en déduit que les ordonnées de I' et de J' sont égales et valent $\frac{2}{3}$.
Par des considérations semblables, on démontre que : $I'(\frac{2a}{3}, \frac{2}{3})$, $J'(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $K'(\frac{2}{3}, \frac{2d}{3})$, et $L'(\frac{2a}{3}, \frac{2d}{3})$.
On en déduit que $\overrightarrow{I'J'} = \overrightarrow{L'K'} \begin{pmatrix} \frac{2-2a}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $I'J'K'L'$ est un parallèlogramme. Donc, G' le point d'intersection des diagonales de $I'J'K'L'$ est le milieu de $[I'K']$, il a pour coordonnée $(\frac{a+1}{3}, \frac{d+1}{3})$
On en déduit que $\overrightarrow{\Omega G'} = \frac{4}{3}\overrightarrow{\Omega G}$ donc Ω, G et G' sont alignés.