# 3 Surface

## 3.1 Définition et exemples

**Exemple 1**

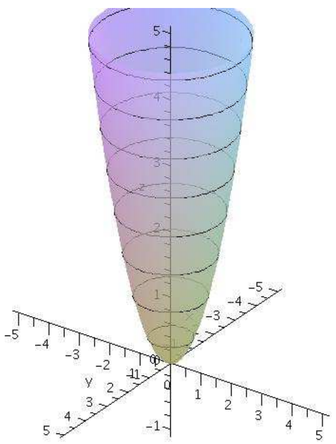
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 2x-7y+1 \end{array}$$

a pour surface représentative un plan. Plus précisément $z = 2x - 7y + 1$, donc il s'agit du plan d'équation $2x - 7y - z + 1 = 0$.

**Exemple 2**

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2 \end{array}$$

a pour surface représentative un paraboloïde de révolution.



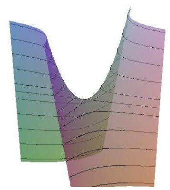
Le paraboloïde de révolution doit son nom au fait qu'il peut être obtenu en faisant tourner une parabole d'équation $y = x^2$ autour de l'axe des côtes.
Le paraboloïde de révolution est symétrique par rapport à $(Oz)$.

**Remarque 1** Les antennes paraboliques sont des paraboloïde de révolution. Le four solaire d'Odeillo dans les Pyrénées utilise également un paraboloïde de révolution.

**Exemple 3**

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x\times y \end{array}$$

a pour surface représentative un paraboloïde hyperbolique.



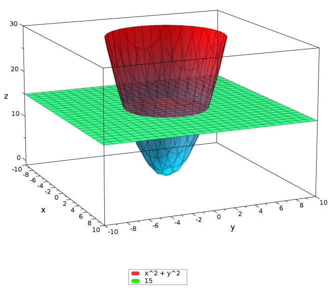
Le paraboloïde hyperbolique est symétrique par rapport à chaque axe du repère.

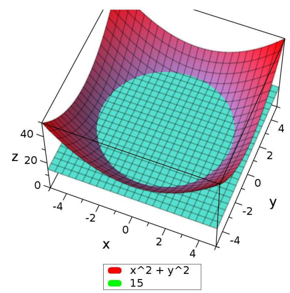
## 3.2 Courbe de niveau

On considère une surface $S$ d'équation $z = f(x,y)$

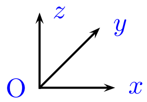
**Définition 1** *On appelle courbe de niveau $k$ de la surface $S$ la courbe d'intersection de $S$ avec le plan horizontal d'équation $z = k$.*

**Exemple 4** Soit $k$ un réel strictement positif, la courbe de niveau $k$ du paraboloïde de révolution d'équation $z = x^2 + y^2$ est un cercle de rayon $\sqrt{k}$.

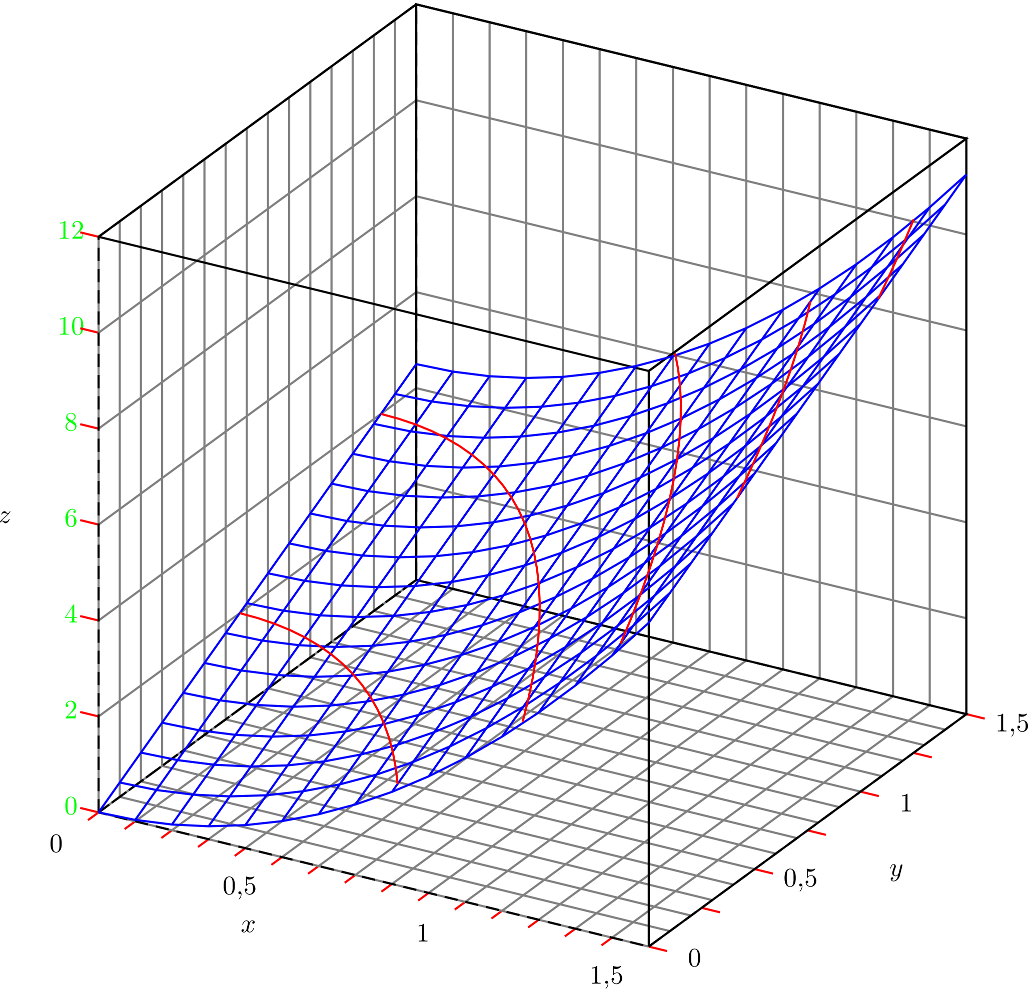





**Exemple 5** L'espace est rapporté à un repère orthogonal.




On a représenté ci-dessous la surface $(S)$ d'équation $z = 3(x^2+y)$, avec $x$ appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 1,5]$, et $y$ appartenant à l'intervalle $[0;1,5]$.




**Partie A - Exploitation du graphique.**

On considère le plan $(P)$ d'équation $z = 6$.

1. Sur la figure donnée, placer le point $A$ de coordonnées $(1\,;1\,;6\,)$.
2. Surlignez en couleur la partie visible de l'intersection de la surface $(S)$ et du plan $(P)$ sur la figure donnée.

**Partie B - Recherche d'un coût minimum.**

Une entreprise fabrique des unités centrales pour ordinateurs dont les composants sont essentiellement des cartes mères et des microprocesseurs.
On appelle $x$ le nombre (exprimé en milliers) de microprocesseurs produits chaque mois et $y$ le nombre (exprimé en milliers) de cartes mères produites chaque mois.
Le coût mensuel de production, exprimé en milliers d'euros, est donné par :

$$C(x\ ;\ y) = 3\left(x^2 + y\right)$$

On se propose de trouver les quantités de microprocesseurs et de cartes mères que l'entreprise doit produire par mois pour minimiser ce coût.

1. La production mensuelle totale est de deux milliers de composants. On a donc $x + y = 2$.
   Exprimer $C(x;y)$ en fonction de la seule variable $x$. On note $f$ la fonction ainsi obtenue.
   Vérifier que $f(x) = 3x^2 - 3x + 6$.
2. Montrer que sur l'intervalle $[0\ ;\ 1,5]$, la fonction $f$ admet un minimum atteint pour $x = 0,5$.
3. Quelles quantités de microprocesseurs et de cartes mères, l'entreprise doit-elle produire chaque mois pour minimiser le coût mensuel de production ? Quel est ce coût ?
4. Placer sur la figure donnée, le point $K$ correspondant au coût minimum.