

## 1 Une sextine du XII<sup>e</sup> siècle

### Ongle et oncle

La ferme volonté qui au cœur m'entre  
ne peut ni langue la briser ni ongle  
de médisant qui perd à mal dire son âme  
n'osant le battre de rameau ni de verge  
sinon en fraude là où je n'ai nul oncle  
je jouirai de ma joie en verger ou chambre

Quand je me souviens de la chambre  
où pour mon mal je sais que nul homme n'entre  
mais tous me sont pires que frère ou qu'oncle  
tremblent tous mes membres jusqu'à l'ongle  
ainsi que fait l'enfant devant la verge  
tant j'ai peur de n'être assez sien dans mon âme

Ah que je sois sien dans le corps non dans l'âme  
et qu'elle m'accueille en secret dans sa chambre  
plus me blesse le cœur que coup de verge  
d'être son serf qui là où elle est n'entre  
toujours je serai près d'elle comme chair et ongle  
n'écoutant aucun reproche d'ami ni oncle

Jamais la sœur de mon oncle  
je n'aimerai tant ou plus par mon âme  
aussi proche qu'est le doigt de l'ongle  
s'il lui plaisait je voudrais être de sa chambre  
il peut faire de moi l'amour qui en mon cœur entre  
à son gré comme homme un fort de faible verge

Depuis qu'a fleuri la sèche verge  
que du seigneur Adam sont nés neveu et oncle  
un amour qui comme celui qui dans mon cœur entre  
je ne crois qu'il a été en corps ni âme  
où qu'elle soit sur la place ou dans la chambre  
mon cœur sera moins loin que l'épaisseur d'un ongle

Qu'ainsi s'enracine devienne ongle  
mon cœur en elle comme écorce en la verge  
elle m'est de joie tour et palais et chambre  
je n'aime tant frère parent ni oncle  
en paradis aura double joie mon âme  
si jamais homme, d'avoir aimé y entre

Arnaut envoie sa chanson d'ongle et d'oncle  
pour plaire à celle qui de sa verge à l'âme  
son Désiré son prix entre en sa chambre

Arnaut Daniel  
(traduction de Jacques Roubaud)

1. Quelle est la particularité des six premières strophes ?
2. S'il n'y avait pas de tornada <sup>1</sup>, quelle forme aurait logiquement la septième strophe ?

## 2 Permutation, cycle et sextine

En mathématique, une permutation d'un ensemble  $E$  de  $n$  objets est une application de  $E$  vers  $E$  telle que chaque élément de  $E$  a un unique antécédent.

**Exemple 1**  $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$$\begin{array}{ccc} \sigma : E & \longrightarrow & E \\ 1 & \longmapsto & 2 \\ 2 & \longmapsto & 3 \\ 3 & \longmapsto & 5 \\ 4 & \longmapsto & 6 \\ 5 & \longmapsto & 1 \\ 6 & \longmapsto & 4 \end{array}$$

La permutation  $\sigma$  est notée

$$\left( \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Une permutation est un cycle d'ordre  $k$  si  $a_1$  a pour image  $a_2$ ,  $a_2$  pour image  $a_3$  etc. et  $a_k$  pour image  $a_1$ .

**Exemple 2** Voici un cycle d'ordre 6.

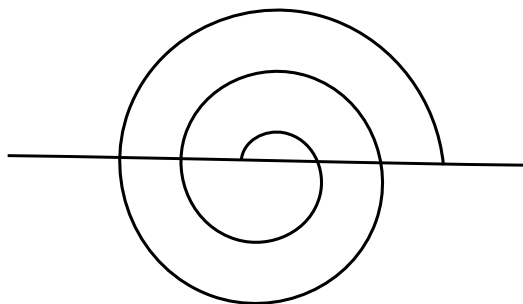
$$\left( \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{array} \right)$$

1. Quelle est la permutation utilisée pour construire la sextine de Daniel Arnaut ?
2. Est-ce un cycle ? Le cas échéant quelle est son ordre ?
3. Comment se traduisent les propriétés de cette permutation sur la forme du poème ?

---

1. Dans la poésie lyrique occitane, la tornada était une strophe finale plus courte qui servait d'envoi à un poème

### 3 Escargot et nombre de Queneau



1. Numéroté les points d'intersection de 1 à 6 entre le trait et la spirale en partant de la gauche.
2. En suivant la spirale, comment retrouve-t-on la permutation de la partie précédente ?
3. En dessinant des spirales, déterminer des « permutations spirales » pour des ensembles à 3,4,5,7 éléments.
4. Parmi les valeurs précédentes, lesquelles donnent des cycles ?

Posons  $E_n = \{1; 2; \dots; n\}$ . On appelle **permutation spirale**, ou permutation de Queneau-Daniel la permutation de  $E_n$  obtenue par le procédé décrit précédemment. On la notera  $\mathcal{Q}_n$ .

On appelle **nombre de Queneau** un entier tel que  $\mathcal{Q}_n$  soit un cycle d'ordre  $n$ .

1. Donner une définition explicite de  $\mathcal{Q}_n$

Un résultat récent répond à la question à quelle condition un entier est-il un nombre de Queneau.

**Théorème 1** (Monique Bringer (1969), Jacques Roubaud (1969) et Jean-Guillaume Dumas (2008))

*Pour que l'entier  $n$  soit un nombre de Queneau, il est nécessaire que  $2n + 1$  soit un nombre premier. Si c'est le cas,  $n$  est un nombre de Queneau si et seulement si*

- soit 2 est d'ordre  $2n$  modulo  $2n + 1$ ,
- soit, si  $n$  est impair, 2 est d'ordre  $n$  modulo  $2n + 1$ .

Une petite explication : Dire que 2 est d'ordre  $2n$  modulo  $2n + 1$  signifie que  $2n$  est la plus petite puissance,  $k$ , telle que  $2n + 1$  divise  $2^k - 1$ .

## 4 Quintine

D'après les parties précédentes 5 est un nombre de Queneau.

1. Combien une quintine sur le modèle d'Ongle et oncle a-t'elle de vers ?
2. Créer une quintine qui utilise une permutation de spirale.