

I - Système de numération

Résumé

On est souvent amené en informatique à manipuler des nombres écrits dans différentes bases. Dans ce chapitre nous verrons les différentes techniques de conversion d'une base à une autre. On se restreindra à l'étude des nombres entiers.

1 Base de numération

Écrire un nombre dans une *base*, c'est se donner la possibilité d'écrire les entiers avec un nombre fini de symboles. Plus précisément, on se donne un entier $B > 1$ et B symboles qui représentent chacun un entier compris entre 0 et $B - 1$.

Exemple 1 L'écriture décimale utilise 10 symboles “0”, “1”, “2”, “3”, “4”, “5”, “6”, “7”, “8” et “9”.

Théorème 1 Soit n un entier non nul. Alors il existe des entiers uniques a_0, a_1, \dots, a_p compris entre 0 et $B - 1$ tels que : $a_p \neq 0$ et

$$n = a_p B^p + a_{p-1} B^{p-1} + \dots + a_1 B + a_0$$

Si a_0, a_1, \dots, a_p représentent des chiffres alors l'écriture de n dans la base B sera : $a_p a_{p-1} \dots a_1 a_0$.

Exemple 2 Dans le système décimal, $143 = 1 \times 10^2 + 4 \times 10 + 3$.

Exemple 3 En binaire 143 s'écrit 10001111 car $1 \times 2^7 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 = 143$.

En informatique, les bases les plus utilisées sont les bases décimales, binaire, octale (0,1,2,3,4,5,6,7) et hexadécimale (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F).

Remarque 1 Les premiers chiffres de chaque base étant les même, l'entier 3 s'écrit 3 en décimal, 3 en octal et en hexadécimal. Par contre 3 s'écrit 11 en binaire. Pour différentier un même nombre écrit dans des bases différentes on met la base en indice (712256_8).

2 Conversions

Le passage d'une écriture dans une base B à une écriture dans une base B' s'appelle la *conversion* de la base B à la base B' .

2.1 Cas général

Un nombre n écrit dans une base B étant donné, on veut l'écrire dans une base B' , cela revient à chercher les coefficients devant les puissances de B' dans écriture en base B' . Remarquons alors que :

$$\begin{aligned} n &= a'_p B'^p + a'_{p-1} B'^{p-1} + \cdots + a'_1 B' + a'_0 \\ &= B'(a'_p B'^{p-1} + a'_{p-1} B'^{p-2} + \cdots + a'_1) + a'_0 \\ &= B'(B'(a'_p B'^{p-2} + a'_{p-3} B'^{p-2} + \cdots + a'_2) + a'_1) + a'_0 \end{aligned}$$

a'_0 est le reste de n dans la division par B' a'_1 est le reste du quotient de la division précédente dans la division par B' etc.

Donc pour effectuer cette conversion il suffit de diviser successivement dans l'ancienne base n par B' , puis les quotients successifs par B' et de s'intéresser aux restes. C'est à dire les convertir dans la nouvelle base et les écrire de droite à gauche.

Exemple 4 Écriture de 1001011011101_2 en base 10.

Tout d'abord convertissons 10 en base 2, $10 = 2^3 + 2$ donc 10 s'écrit 1010_2 . en base 2.

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1 \\ \underline{1\ 0\ 1\ 0} \\ \hline 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \\ \underline{1\ 0\ 1\ 0} \\ \hline 0\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ \underline{1\ 0\ 1\ 0} \\ \hline 1\ 0\ 1\ 0 \\ \underline{1\ 0\ 1\ 0} \\ \hline 0\ 1\ 1\ 1\ 0 \\ \underline{1\ 0\ 1\ 0} \\ \hline 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1010 \\ \hline 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ \underline{1\ 0\ 1\ 0} \\ \hline 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ \hline 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ \underline{1\ 0\ 0\ 0\ 0} \\ \hline 1\ 0\ 0 \\ \underline{1\ 0\ 0} \\ \hline 0 \end{array}$$

Les restes trouvés en base deux sont 1001, 10, 1000 et 100. C'est à dire en base 10 ; 9, 2, 8 et 4. Donc $1001011011101_2 = 4829_{10}$.

2.2 Cas où B est une puissance de B'

On suppose maintenant que $B = (B')^k$.

Dans ce cas $n = a_p B^p + a_{p-1} B^{p-1} + \cdots + a_1 B + a_0 = a_p (B')^{kp} + a_{p-1} (B')^{k(p-1)} + \cdots + a_1 (B')^k + a_0$ donc il suffit d'écrire les a_i dans la base B' pour obtenir l'écriture de n dans la base B' .

Exemple 5 Écriture de $1234AF5678_{16}$ en base 2.

On cherche k , ici $k = 4$, car $2^4 = 16$. On convertit tous les chiffres de $1234AF5678$ en binaire que l'on écrit avec 4 chiffres.

1	—>0001
2	—>0010
3	—>0011
4	—>0100
A	—>1010
F	—>1111
5	—>0101
6	—>0110
7	—>0111
8	—>1000

Et on colle bout à bout tous les mots binaires :

$$\text{Donc } 1234AF5678_{16} = 100100011010010101110101011001111000_2$$

2.3 Cas où B' est une puissance de B

On effectue le même travail mais dans l'autre sens.

Exemple 6 Écriture de 1010101011100100101001_2 en base 8.

On calcule k , ici $k = 3$. On découpe le nombre par tranche de 3 en partant de la droite.

$$1010101011100100101001 = 1\ 010\ 101\ 011\ 100\ 100\ 101\ 001$$

On convertit les nombres ainsi formés en base 8.

1	—>1
010	—>2
101	—>5
011	—>3
100	—>4
100	—>4
101	—>5
001	—>1

Et on colle bout à bout tous les mots hexadécimaux :

$$1010101011100100101001_2 = 12534451_8$$