

I - Système de numération

Résumé

On est souvent amené en informatique à manipuler des nombres écrits dans différentes bases. Dans ce chapitre nous verrons les différentes techniques de conversion d'une base à une autre. On se restreindra à l'étude des nombres entiers.

1 Base de numération

Écrire un nombre dans une *base*, c'est se donner la possibilité d'écrire les entiers avec un nombre fini de symboles. Plus précisément, on se donne un entier $B > 1$ et B symboles qui représentent chacun un entier compris entre 0 et $B - 1$.

Exemple 1 L'écriture décimale utilise 10 symboles "0", "1", "2", "3", "4", "5", "6", "7", "8" et "9".

Théorème 1 Soit n un entier non nul. Alors il existe des entiers uniques a_0, a_1, \dots, a_p compris entre 0 et $B - 1$ tels que : $a_p \neq 0$ et

$$n = a_p B^p + a_{p-1} B^{p-1} + \dots + a_1 B + a_0$$

Si a_0, a_1, \dots, a_p représentent des chiffres alors l'écriture de n dans la base B sera : $a_p a_{p-1} \dots a_1 a_0$.

Exemple 2 Dans le système décimal, $143 = 1 \times 10^2 + 4 \times 10 + 3$.

Exemple 3 En binaire 143 s'écrit 10001111 car $1 \times 2^7 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 = 143$.

En informatique, les bases les plus utilisées sont les bases décimales, binaire, octale (0,1,2,3,4,5,6,7) et hexadécimale (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F).

Remarque 1 Les premiers chiffres de chaque base étant les mêmes, l'entier 3 s'écrit 3 en décimal, 3 en octal et en hexadécimal. Par contre 3 s'écrit 11 en binaire. Pour différencier un même nombre écrit dans des bases différentes on met la base en indice (712256_8).

2 Conversions

Le passage d'une écriture dans une base B à une écriture dans une base B' s'appelle la *conversion* de la base B à la base B' .

On cherche k , ici $k = 4$, car $2^4 = 16$. On convertit tous les chiffres de 1234AF5678 en binaire que l'on écrit avec 4 chiffres.

1	→	0001
2	→	0010
3	→	0011
4	→	0100
A	→	1010
F	→	1111
5	→	0101
6	→	0110
7	→	0111
8	→	1000

Et on colle bout à bout tous les mots binaires :

Donc $1234AF5678_{16} = 1001000110100101011110101011001111000_2$

2.3 Cas où B' est une puissance de B

On effectue le même travail mais dans l'autre sens.

Exemple 6 Écriture de 1010101011100100101001_2 en base 8.

On calcule k , ici $k = 3$. On découpe le nombre par tranche de 3 en partant de la droite.

$1010101011100100101001 = 1\ 010\ 101\ 011\ 100\ 100\ 101\ 001$

On convertit les nombres ainsi formés en base 8.

1	→	1
010	→	2
101	→	5
011	→	3
100	→	4
100	→	4
101	→	5
001	→	1

Et on colle bout à bout tous les mots hexadécimaux :

$1010101011100100101001_2 = 12534451_8$