Le calcul intégral

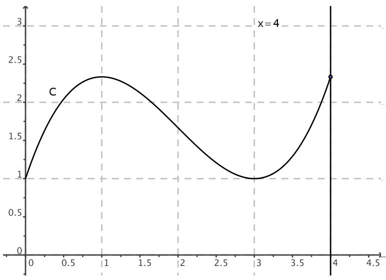
1 Introduction

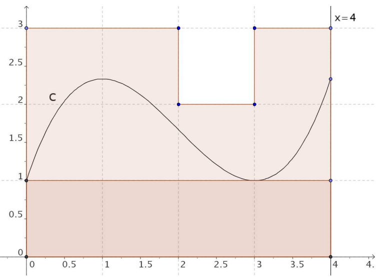
Définition 1.1. *Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;\ b]$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal. On appelle aire sous la courbe C entre a et b l'aire de la partie du plan délimitée par C, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.*

Remarque 1.2. L'aire sous la courbe s'exprime en fonction de l'aire du rectangle unité. C'est à dire le rectangle ayant pour côtés [OI] et [OJ]. Par exemple, si OI = 1cm et OJ = 1cm alors l'aire sous la courbe sera exprimée en cm^2. Si les unités des axes ne sont pas précisées, on exprimera l'aire sous la courbe en unité d'aire (**ua** en abrégé)

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0;\ 4]$, on a représenté la courbe représentative de f sur trois grilles différentes. A l'aide des trois graphiques donner trois encadrements de l'aire sous la courbe, que l'on notera $\mathcal{A}$ de plus en plus précis.

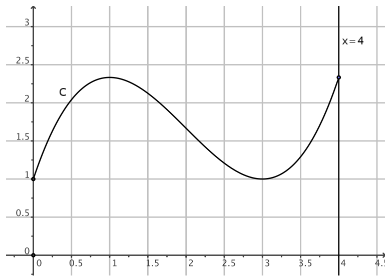
1.



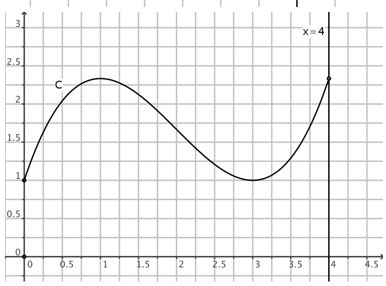


$4 < \mathcal{A} < 11$

2.



3.



Dans la suite on essayera de déterminer, quand c'est possible, la valeur exacte de $\mathcal{A}$

2 Notion d'intégrale

Définition 2.1. *Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et F une primitive de f sur $[a;b]$, on appelle intégrale de f entre a et b la quantité $F(b) - F(a)$. Elle sera notée $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Remarque 2.2. La définition ne dépend pas de la primitive choisie. En effet si G est une autre primitive de f, on sait qu'il existe une constante k telle que $F = G + k$. Donc $G(b) - G(a) = (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$

Remarque 2.3. Dans $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ la variable est dite muette, c'est à dire $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(z)\mathrm{d}z$ etc...

2.1) Calculer

1. $\int_{-3}^{3} 1 + x\,\mathrm{d}x$
2. $\int_{-1}^{3} \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

3. $\int_1^3 \frac{1}{x}+1\mathrm{d}x$

Théorème 2.4. *Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$, F une primitive de f sur $[a;b]$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal. L'aire sous la courbe $\mathcal{A}$ est égale à l'intégrale de f entre a et b.*

$$\mathcal{A}=\int_a^b f(t)\mathrm{dt}$$

La fonction utilisée dans l'introduction est définie par $f: x\longmapsto \frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$, déterminer la valeur exacte de $\mathcal{A}$

3 Propriété de l'intégrale

Proposition 3.1. *Soit f et g deux fonctions continues définies sur $[a;b]$, λ et μ deux réels.*

$$\int_a^b \lambda f(t)+\mu g(t)\mathrm{dt}=\lambda\int_a^b f(t)\mathrm{dt}+\mu\int_a^b g(t)\mathrm{dt}$$

Démonstration. $\int_a^b \lambda f(t)+\mu g(t)\mathrm{dt}=[\lambda F(t)+\mu G(t)]_a^b=(\lambda F(b)+\mu G(b))-(\lambda F(a)+\mu G(a))=\lambda(F(b)-F(a))+\mu(G(b)-G(a))=\lambda\int_a^b f(t)\mathrm{dt}+\mu\int_a^b g(t)\mathrm{dt}$

□

Proposition 3.2. *(Relation de Chasles) Soit f une fonction continue définie sur un intervalle I et a, b et c trois réels de I*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{dt}=\int_a^c f(t)\mathrm{dt}+\int_c^b f(t)\mathrm{dt}$$

3.1) Illustrer par un schéma cette proposition

Proposition 3.3. *Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$.*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{dt}\geqslant 0$$

Proposition 3.4. *Soit f et g deux fonctions continues définies sur $[a;b]$ telles que $f(x)\leqslant g(x)$*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{dt}\leqslant\int_a^b g(t)\mathrm{dt}$$

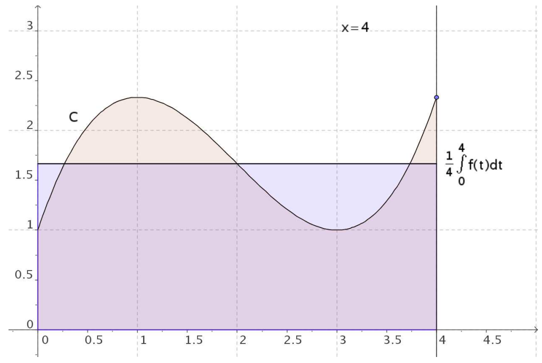
3.2) Illustrer par un schéma cette proposition

4 Valeur moyenne

Définition 4.1. *Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, on appelle valeur moyenne de f sur $[a;b]$ la quantité*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{dt}$$

Pour une fonction positive, la valeur moyenne est la valeur de la fonction constante sur $[a;b]$ dont l'aire sous la courbe est la même que celle de C



4.1) Calculer:

1. La valeur moyenne de $x\longmapsto x^2$ sur [1;3]
2. La valeur moyenne de $x\longmapsto\frac{1}{2}\mathrm{e}^x$ sur $[1;5]$
3. La valeur moyenne de $x\longmapsto\frac{2x}{1+x^2}$ sur $[-1;1]$