# 1 Cylindre et cône

## 1.1 Cylindre

### 1.1.1 Définition

**Définition 1** *Soit $\mathcal{C}$ un cercle de $(Oxy)$ de centre $O$ et de rayon $r$. On appelle cylindre d'axe $(O, \overrightarrow{k})$ et de rayon $r$. L'ensemble des images de $\mathcal{C}$ par les translation de direction $\overrightarrow{k}$. $\mathcal{C}$ est appelé le cercle directeur du cylindre.*

**Proposition 1** *Le cylindre d'axe $(O, \overrightarrow{k})$ et de rayon $r$ a pour équation :*

$$x^2 + y^2 = r^2$$

### 1.1.2 Intersection d'un cylindre et d'un plan

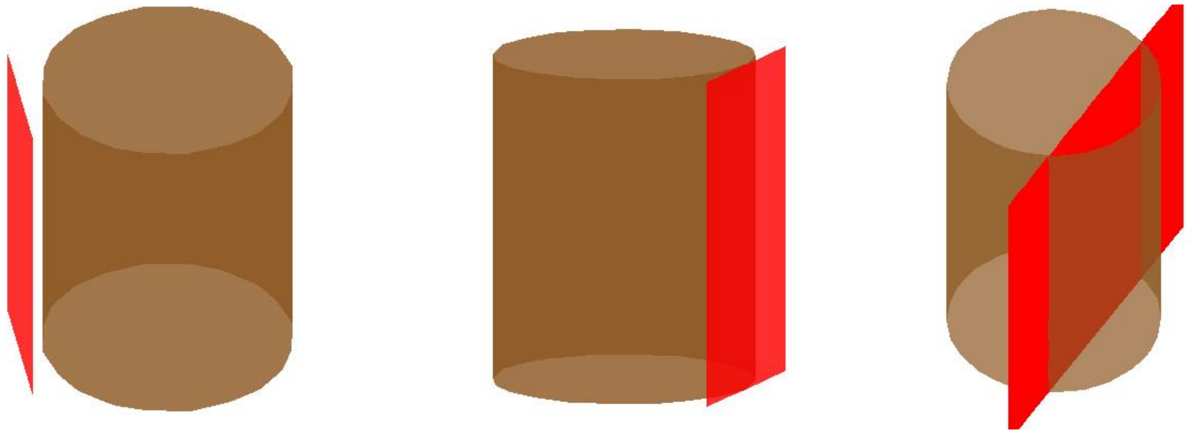
Soit $\Gamma$ un cylindre d'équation $x^2 + y^2 = r^2$.

**Plan parallèle à $(Oxy)$** L'intersection de $\Gamma$ avec le plan d'équation $z = k$ est un cercle d'équation :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ z = k \end{cases}$$

**Plan parallèle à $(Oz)$** Soit $P$ un plan parallèle à $(O, \overrightarrow{k})$ on appelle $d$ la distance de $P$ à $(O, \overrightarrow{k})$.
L'intersection de de $P$ et de $\Gamma$ dépend de $r$ et de $d$.
- Si $d > r$ l'intersection est vide.
- Si $d = r$ l'intersection est une droite parallèle à $(O, \overrightarrow{k})$.
- Si $d < r$ l'intersection est la réunion deux droites parallèles à $(O, \overrightarrow{k})$.

$d > r$ $\qquad$ $d = r$ $\qquad$ $d < r$



## 1.2 Cône

### 1.2.1 Définition

**Définition 2** *Soit $\mathcal{C}$ un cercle d'équation $\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ z = 1 \end{cases}$. Le cône d'axe $(O\overrightarrow{k})$ est l'ensemble des images de $\mathcal{C}$ par les homothéties de centre $O$.*

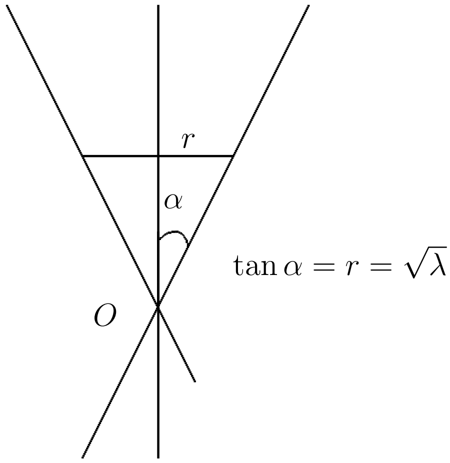
**Proposition 2** *Tout cône d'axe $(O, \overrightarrow{k})$ a une équation du type :*

$$x^2 + y^2 = \lambda z^2 \qquad \text{où } \lambda \text{ est un réel positif.}$$

**Définition 3** *Toute droite passant par $O$ et un point de $\mathcal{C}$ est appelée génératrice du cône.*

**Remarque 1** L'angle formé par une génératrice et $(Oz)$ ne dépend de la génératrice et est appelé *demi-angle* au sommet du cône.

**Proposition 3** *Soit $C$ un cône d'équation $x^2+y^2=\lambda z^2$ et de demi-angle au sommet $\alpha$.* $\tan\alpha=\sqrt{\lambda}$




### 1.2.2 Intersection d'un cône et d'un plan

Soit $C$ un cône d'équation $x^2+y^2=\lambda z^2$.

**Plan parallèle à** $(Oxy)$ L'intersection de $C$ avec le plan d'équation $z=k$ est :
- Si $k=0$, $O$, l'origine du repère.
- Si $k\neq 0$, le cercle d'équation $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=\lambda r^2 \\ z=k \end{array}\right.$

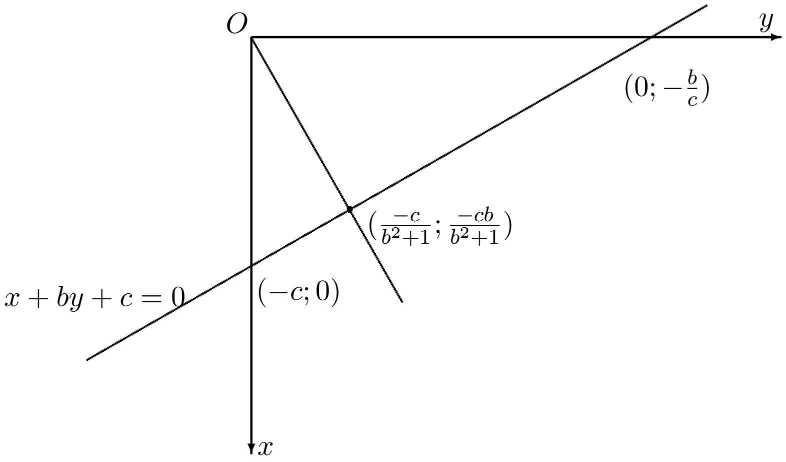
**Plan parallèle à** $(Oz)$ Soit $P$ un plan parallèle à $(O,\overrightarrow{k})$. L'intersection de $C$ avec $P$ est :
- Si $P$ passe par $O$, la réunion de deux droites passant par l'origine.
- Sinon, la réunion de deux hyperboles.

**Preuve** $P$ a pour équation $ax+by+c=0$,

1. Si $P$ passe par $O$, $c=0$.
   Soit $a$, soit $b$ est différent de 0, supposons que $a\neq 0$. Dans ce cas $x=-\frac{by}{a}$.
   Un point $(x,y,z)$ qui apparatient à $P\cap C$ vérifie $\left\{\begin{array}{l} x=-\frac{by}{a} \\ x^2+y^2=\lambda z^2 \end{array}\right.$.

$$\left\{\begin{array}{l} x=-\frac{by}{a} \\ \frac{b^2y^2}{a^2}+y^2=\lambda z^2 \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{l} x=-\frac{by}{a} \\ \frac{b^2+a^2}{a^2}y^2-\lambda z^2=0 \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{l} x=-\frac{by}{a} \\ \left(\sqrt{\frac{b^2+a^2}{a^2}}y-\sqrt{\lambda}z\right)\left(\sqrt{\frac{b^2+a^2}{a^2}}y+\sqrt{\lambda}z\right)=0 \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{l} x=-\frac{by}{a} \\ \sqrt{\frac{b^2+a^2}{a^2}}y-\sqrt{\lambda}z=0 \text{ ou } \sqrt{\frac{b^2+a^2}{a^2}}y+\sqrt{\lambda}z=0 \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{l} x=-\frac{by}{a} \\ \sqrt{\frac{b^2+a^2}{a^2}}y-\sqrt{\lambda}z=0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} x=-\frac{by}{a} \\ \sqrt{\frac{b^2+a^2}{a^2}}y+\sqrt{\lambda}z=0 \end{array}\right.$$

2. Si $P$ ne passe pas par $O$, $c\neq 0$.
   Soit $a$, soit $b$ est différent de 0, supposons que $a\neq 0$. Dans ce cas $x=-\frac{by+c}{a}$. Pour simplifier l'écriture on écrira $x=-by-c$ (on remplace $\frac{b}{a}$ par $b$ et $\frac{c}{a}$ par $c$). On effectue un changement de variable afin de placer l'origine du repère dans le plan $P$, et que la direction d'un des vecteurs du nouveau repère soit parallèle à $P$.




On pose donc $\begin{cases} x = X - bY - \frac{c}{b^2+1} \\ y = bX + Y - \frac{bc}{b^2+1} \end{cases}$

Le système $\begin{cases} x = -by - c \\ x^2 + y^2 = \lambda z^2 \end{cases}$

devient : $\begin{cases} (b^2+1)X = 0 \\ \frac{b^4Y^2+2b^2Y^2+Y^2+b^4X^2+2b^2X^2+X^2-2b^2cX-2cX+c^2}{b^2+1} = lz^2 \end{cases}$

$\begin{cases} X = 0 \\ \frac{b^4Y^2+2b^2Y^2+Y^2+c^2}{b^2+1} = \lambda z^2 \end{cases}$

$\begin{cases} X = 0 \\ \frac{Y^2(b^4+2b^2+1)+c^2}{b^2+1} = \lambda z^2 \end{cases}$

$\begin{cases} X = 0 \\ \frac{Y^2(b^2+1)^2}{b^2+1} - \lambda z^2 = -\frac{c^2}{b^2+1} \end{cases}$

$\begin{cases} X = 0 \\ \frac{Y^2(b^2+1)^2}{b^2+1} - \lambda z^2 = -\frac{c^2}{b^2+1} \end{cases}$

Posons $k = -\frac{c^2}{b^2+1}$

On $\lambda$ étant positif on obtient :

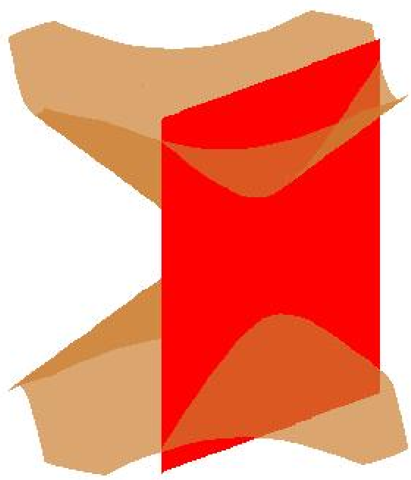
$\begin{cases} X = 0 \\ (\frac{Y}{\sqrt{b^2+1}} - \sqrt{\lambda}z)(\frac{Y}{\sqrt{b^2+1}} - \sqrt{\lambda}z) = k \end{cases}$

Enfin en posant $U = \frac{Y}{\sqrt{b^2+1}} - \sqrt{\lambda}z$ et $V = \frac{Y}{\sqrt{b^2+1}} + \sqrt{\lambda}z$ le système se transforme en :

$\begin{cases} X = 0 \\ U \times V) = k \end{cases}$

Donc l'intersection est l'hyperbole d'équation $U = \frac{k}{V}$ dans le plan d'équation $X = 0$.

CQFD.

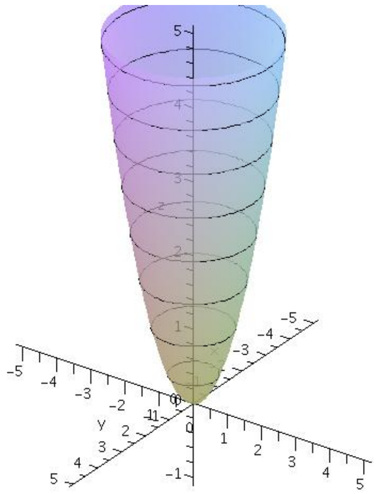


# 2 Surface du type $z = f(x, y)$

## 2.1 Paraboloïde de révolution

**Définition 4** *L'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que $z = x^2 + y^2$ est une surface appelée paraboloïde de révolution de sommet $O$ et d'axe $(Oz)$.*

**Proposition 4** *Un paraboloïde de révolution est symétrique par rapport à son axe.*

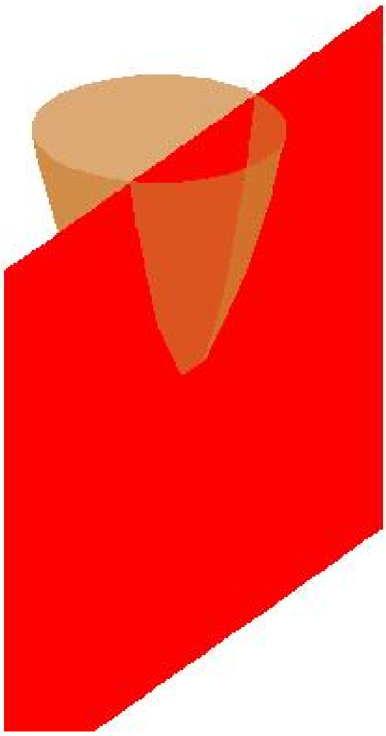


### 2.1.1 Intersection d'un paraboloïde et d'un plan

Soit $P$ un paraboloïde d'équation $x^2 + y^2 = z$.

**Plan parallèle à** $(Oxy)$ L'intersection de $P$ avec le plan d'équation $z = k$ est :
- Si $k < 0$, l'ensemble vide.
- Si $k = 0$, $O$, l'origine du repère.
- Si $k > 0$, le cercle d'équation $\begin{cases} x^2 + y^2 = k \\ z = k \end{cases}$

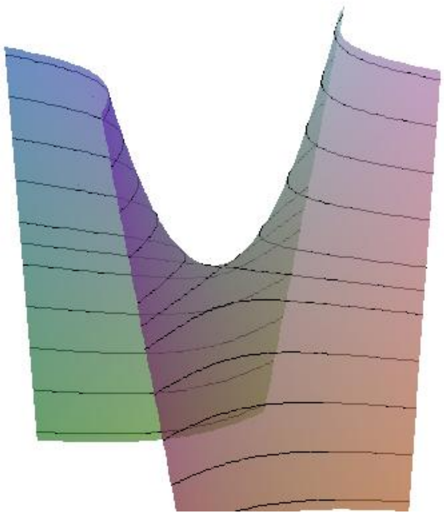
**Plan parallèle à** $(Oz)$ L'intersection de $P$ avec un plan parallèle à $(Oz)$ est une parabole.



## 2.2 Paraboloïde hyperbolique

**Définition 5** *L'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace tels que $z = xy$ est une surface appelée paraboloïde hyperboloïque.*

**Proposition 5** *Un paraboloïde hyperbolique est symétrique par rapport aux axes du repère.*



**Proposition 6** *Par tout point du paraboloïde hyperbolique passent deux droites incluses dans le paraboloïde.*

**Remarque 2** Le paraboloïde est généré par deux familles de droites, on dit que le paraboloïde hyperbolique est une *surface réglée.*

### 2.2.1 Intersection d'un paraboloïde hyperbolique et d'un plan

Soit $P$ un paraboloïde hyperbolique d'équation $xy = z$.

**Plan parallèle à $(Oxy)$** L'intersection de $P$ avec le plan d'équation $z = k$ est :

- Si $k = 0$, la réunion des droites $(O\overrightarrow{i})$ et $(O\overrightarrow{j})$.
- Si $k > 0$, une hyperbole d'équation $\begin{cases} x \cdots y = k \\ z = k \end{cases}$

**Plan parallèle à $(Oz)$** L'intersection de $P$ avec un plan parallèle à $(Oz)$ est soit une droite soit une parabole.

Intersection avec $(yOz)$ ou $(zOx)$ Intersection avec un plan différent.