1 Calcul propositionnel

1.1 Proposition

Définition 1 *Une proposition est une affirmation qui peut être vrai ou fausse.*

Exemple 1 Voici quelques propositions :
- "Lille est la capitale du Nord"
- "2+2=4"
- "2+2=5"

Les deux premières sont vraies, la troisième est fausse. En revanche, "Ceci est une proposition fausse" n'est pas une proposition. Car on ne peut donner de valeur de vérité à cette affirmation : elle n'est ni vraie ni fausse.

1.2 Connecteurs logiques

On peut associer plusieurs propositions pour en former une nouvelle, on réalise ainsi une *connexion*. À toute connexion, on peut lui associer une table de vérité, c'est à dire un tableau qui donne la valeur de vérité de la proposition en fonction des valeurs de vérité des propositions qui la compose.
Voici quatre connexions de référence :

1.2.1 La négation

Définition 2 *Soit P une proposition, l'affirmation P est fausse est une proposition notée $\neg P$.*

P	$\neg P$
V	**F**
F	**V**

Exemple 2
- Il est faux que "3+3=7"
- Lille n'est pas la capitale du Nord.

1.2.2 La conjonction

Définition 3 *Soit P et Q deux propositions, l'affirmation P et Q sont vraies est une proposition appelée la conjonction de P et Q. Cette proposition est notée $P \wedge Q$.*

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**F**

Exemple 3 "3+3=7" et "Lille est une ville du Nord".

1.2.3 La disjonction

Définition 4 *Soit P et Q deux propositions, l'affirmation P ou Q est vraie est une proposition appelée la disjonction de P et Q. Cette proposition est notée $P \vee Q$.*

P	Q	$P \vee Q$
V	V	**V**
V	F	**V**
F	V	**V**
F	F	**F**

Exemple 4 "3+3=7" ou "Lille est dans le Nord".

Remarque 1 Il ne s'agit pas d'un "ou" exclusif. "2+2=4" ou "Lille est en France" est une proposition vraie.

1.2.4 L'implication

Définition 5 *Soit P et Q deux propositions, l'affirmation "(non P) ou Q" est vraie est une proposition appelée la implication de P et Q. Cette proposition est notée $P \to Q$. Et l'on dit : "P implique Q" ou "si P alors Q".*

P	Q	$P \to Q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**V**
F	F	**V**

Au vue de la table de vérité, on s'aperçoit facilement que lorsque $P \to Q$, si P est vraie alors Q l'est forcément. Attention cependant, si P est fausse, $P \to Q$ est vraie quelque soit la valeur de vérité de Q.

Exemple 5
- "2+2=3" implique "Lille est une ville espagnole" est une proposition vraie.
- "2+2=4" implique "'Lille est une ville française" est également une proposition vraie.

Remarque 2 Ces exemples montrent que le sens de P implique Q en calcul propositionnel est très "particulier" il est donc nécessaire de le manipuler avec précaution.

Remarque 3 $\neg P \vee Q$ n'a pas un sens bien défini, il est nécessaire d'utiliser des parenthèses pour préciser s'il s'agit de $(\neg P) \vee Q$ ou de $\neg(P \vee Q)$

Remarque 4 $\neg$, $\wedge$, $\vee$ et $\to$ sont appelés des connecteurs logiques.

1.3 Formes propositionnelles

Définition 6 *Une variable ne pouvant prendre que deux valeurs **V** ou **F** est une variable propositionnelle.*

Définition 7 *On considère un ensemble non vide de variables propositionnelles. Une forme propositionnelle est une formule faisant intervenir des propositions des connecteurs logiques et des parenthèses construite uniquement à l'aide des règles suivantes.*

1. *une proposition est une forme propositionnelle.*
2. *une variable propositionnelle est une forme propositionnelle.*
3. *si u et v sont deux formes propositionnelles alors $u \wedge v$ et $u \vee v$ sont des formes propositionnelles.*
4. *si u est une forme propositionnelle alors $\neg u$ est une forme propositionnelle.*

Exemple 6 Soit P : "Lille est la capitale du nord", p et q deux variables propositionnelles.

$$(p \wedge (P \vee (\neg q))) \vee ((\neg P) \wedge q)$$

est une forme propositionnelle.

À toute forme propositionnelle on peut associer sa table de vérité :

p	q	r	$((\neg r) \wedge p) \to q$
V	V	V	**V**
V	V	F	**V**
V	F	V	**V**
V	F	F	**F**
F	V	V	**V**
F	V	F	**V**
F	F	V	**V**
F	F	F	**V**

Définition 8 *Un choix des valeurs de vérité des variables qui donne une proposition vraie s'appelle un modèle de la forme propositionnelle.*

Définition 9 *Deux formes propositionnelles qui ont au moins un modèle en commun sont dites compatibles. Dans le cas contraire elles sont contradictoires ou incompatibles.*

Définition 10 *Une forme propositionnelle qui prend toujours la valeur de vérité **V** est une tautologie.*

Exemple 7 Une porte est soit ouverte soit fermée, $p \to p$ sont des tautologies.

Définition 11 *Une forme propositionnelle qui prend toujours la valeur de vérité **F** est une contradiction.*

Exemple 8 $(\neg p) \wedge p$ est une contradiction.

1.4 Formes propositionnelles et algèbre de Boole

Définition 12 *Deux formes propositionnelles sont synonymes quand elles ont la même table de vérité.*

Proposition 1 *La relation "être synonyme de" est une relation d'équivalence. Si P et Q sont synonymes on notera $P \equiv Q$.*

Exemple 9 $f_1 = p \to q$ et $f_2 = (\neg q) \to (\neg p)$ sont deux formes propositionnelles synonymes l'une de l'autre. f_2 est la contraposée de f_1. On peut résumer ceci par :

$$p \to q \;\equiv\; (\neg q) \to (\neg p)$$

On se donne un ensemble V de variables propositionnelles. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des formes propositionnelles définies sur V et T l'ensemble des classes d'équivalences de $\mathcal{P}$ par cette relation. Une forme propositionnelle pouvant être identifiée à sa table de vérité. On peut considérer que T est l'ensemble des tables de vérité obtenues à partir des variables de $\mathcal{V}$.
Les connecteurs induisent des opérations sur T que l'on notera de la même façon pour ne pas alourdir les notations.
Soit v la table de vérité de la tautologie et f la table de vérité de la contradiction.

Proposition 2 $(T, \vee, \wedge, \neg, f, v)$ *est une algèbre de Boole.*

Si l'ensemble des variables propositionnelles est de taille n, le calcul propositionnel n'est rien d'autre que le calcul booléen dans $\mathcal{F}^n$.

2 Calculs des prédicats

2.1 Prédicats du premier ordre

Définition 13 *Soit A un ensemble, toute application de A sur $\{$**V**,**F**$\}$ est appelé un prédicat.*

$$\begin{array}{rcl} P : A & \longrightarrow & \{\boldsymbol{V},\boldsymbol{F}\} \\ x & \longmapsto & P(x) \end{array}$$

A est appelé l'univers de P.

Exemple 10
- $\{n : n \in \mathbb{N}, \text{est pair}\}$ est vrai ou faux selon la valeur de n. L'univers de ce prédicat est $\mathbb{N}$
- $\{x : x \in \mathbb{R}, x + 5 > 1\}$ est un prédicat d'univers $\mathbb{R}$

2.2 Quantificateurs

2.2.1 Quantificateur universel

Définition 14 *Soit P un prédicat sur A, la proposition "Pour tout x de A $P(x)$ est vrai" se note $(\forall x \in A)\, P(x)$. $\forall$ se lit "Pour tout" ou "pour chaque".*

Exemple 11 $(\forall n \in \mathbb{N})(2n \text{ est pair})$

2.2.2 Quantificateur existentiel

Définition 15 *Soit P un prédicat sur A, la proposition "Il existe un élément x de A tel que $P(x)$ est vrai" se note $(\exists x \in A)\, P(x)$. $\exists$ se lit "Il existe".*

2.3 Négation des quantificateurs

Proposition 3
1. $\neg(\forall x \in A)p(x) \equiv (\exists x \in A)\neg p(x)$
2. $\neg(\exists x \in A)p(x) \equiv (\forall x \in A)\neg p(x)$

Exemple 12 La négation d'«il existe un livre bleu dans cette bibliothèque» est «tous les livres de cette bibliothèque ne sont pas bleus». De même la négation de «tous les hommes sont mortels» est «il existe un homme immortel».

Remarque 5 Pour montrer qu'une propriété universelle est fausse il suffit de trouver un contre-exemple. Par exemple, pour montrer que la propriété «tous les nombres premiers sont impairs» est fausse ; il suffit de remarquer que 2 est un nombre premier pair.

2.4 Prédicats d'ordre supérieur

Définition 16 *Soit $A_1; A_2; \cdots; A_n$, n ensembles, toute application de $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ sur $\{$**V**,**F**$\}$ est appelé un prédicat d'ordre n.*

$$\begin{array}{rcl} P : A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n & \longrightarrow & \{\boldsymbol{V},\boldsymbol{F}\} \\ x & \longmapsto & P(x) \end{array}$$

Exemple 13 $\{(n_1; n_2; n_3) : (n_1; n_2; n_3) \in \mathbb{N}^3, n_1 + 2n_2 - 15n_3 < 1\}$ est un prédicat d'ordre 3.

Exemple 14
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})(n \leqslant x < n + 1)$ se lit pour tout réel x il existe un entier n tel que $n \leqslant x < n + 1$. (n est la partie entière de x).
- Soit f une fonction réelle. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \eta > 0)(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2)(|f(x) - f(y)| < \varepsilon)$ se lit pour tout ε positif, il existe un η positif tel que pour tout couple de réels (x, y), $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. ($f$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$)

Remarque 6 L'ordre des quantificateurs est très important. En effet $(\exists m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(2n = m)$ est une proposition fausse alors que $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})(2n = m)$ est vraie.

Remarque 7 La négation de $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})(n \leqslant x < n + 1)$ est $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})((n > x) \vee (x \geqslant n + 1))$